

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Stavebná fakulta
Katedra globálnej geodézie a geoinformatiky

Študijný program: **GEODÉZIA A KARTOGRAFIA**

Predmet: **FYZIKÁLNA GEODÉZIA**

Ročník: 3

Ak. rok: 2025/2026

Meno študenta:

Číslo zadania:

**Zadanie č. 5 – Anomálne tiažové pole Zeme, určovanie geoidu
a zvislicových odchýlok**

1. Vypočítajte anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu a úplné Bouguerove anomálie tiažového zrýchlenia v danej lokalite. Vypočítané anomálie graficky znázorníte a porovnájte ich s priebehom terénu.
2. Vypočítajte poruchu tiažového zrýchlenia δg , anomáliu tiažového zrýchlenia Δg , druhú radiálnu deriváciu poruchového potenciálu T_{rr} a výšku kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom ζ v celosvetovom gride s použitím globálneho geopotenciálneho modelu Zeme.

Obsah zadania:

- Text zadania (tento list)

Úloha 1:

- Ukážka vstupného súboru a mapa polohy meraných bodov
- Tabuľka vypočítaných hodnôt (normálne tiažové zrýchlenie na povrchu elipsoidu GRS-80, zmena normálneho tiažového zrýchlenia s výškou, anomália tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu, redukcia z Bouguerovej dosky, úplná Bouguerova anomália)
- Mapa nadmorských výšok, mapa anomálií tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu, mapa úplných Bouguerových anomálií
- Technická správa (definície, matematické vzťahy, slovný komentár k výsledkom a k využitiu jednotlivých typov anomálií tiažového zrýchlenia v geodézii)

Úloha 2:

- Výsledné hodnoty v 3 ľubovoľne zvolených bodoch gridu
- Grafické znázornenie výsledkov
- Technická správa s definíciami, obrázkami, použitými matematickými vzťahmi a postupom výpočtu

Termín odovzdania zadania: 9. 12. 2025

Zadal: Blažej Bucha

Technická správa

Študijný program: GEODÉZIA A KARTOGRAFIA

Predmet: Fyzikálna geodézia 1

Ročník: 3

Školský rok: 2025/2026

Č. zadania: 4

Definovanie úlohy

Technickú správu vyhotovujeme k Zadaniu č.5 – Anomálne tiažové pole Zeme, určovanie geoidu a zvislicových odchýlok, ktoré nám zadal vyučujúci doc. Ing. Blažej Bucha, Phd. dňa 18.11.2025. Na základe zadania sme vypočítali anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu a úplné Bouguerove anomálie tiažového zrýchlenia v danej lokalite a vypočítali sme poruchu tiažového zrýchlenia δg , anomáliu tiažového zrýchlenia Δg , druhú radiálnu deriváciu poruchového potenciálu T_{rr} a výšku kvázigeoidu ζ na globálnom mriežkovom poli pomocou globálneho geopotenciálneho modelu Zeme. Zadanie má obsahovať: technickú správu, mapy zobrazujúce vypočítané parametre, ukážku vstupných hodnôt, tabuľku výsledných hodnôt.

Postup riešenia úlohy

Úloha č.1

Tabuľka č.1- Ukážka vstupných hodnôt

Č.b.	Fi	Lambda	h	H	g	dgtop
10	48.58083	19.12806	335.961	292.06	980864.5	0.41
20	48.57833	19.12778	336.302	292.4	980863.6	0.42
30	48.57528	19.12778	334.995	291.09	980863.1	0.46
...						
4850	48.57583	19.16	347.249	303.34	980864.6	0.58

V prvej úlohe začneme výpočtom geometrických a fyzikálnych parametrov na povrchu elipsoidu GRS-80, ktorého základné parametre sú uvedené v tabuľke č.2:

Tabuľka č.2- Základné parametre ekvipotencionálneho elipsoidu- GRS80

Dĺžka hlavnej polosi- a	6 378 137 m
Dynamický faktor- $J_{2,0}$	$108\,263 \times 10^{-8}$
Geocentrická gravitačná konštanta- GM	$3\,986\,005 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
Uhlová rýchlosť rotácie- ω	$7\,292\,115 \times 10^{-11} \text{ rad s}^{-1}$

Geometrické parametre:

Prvá numerická excentricita:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad (1)$$

$$e^2 \approx 3J_{2,0} + q - \frac{9}{14}q^2 - \frac{27}{14}J_{2,0}q + \frac{149}{392}q^3 + \frac{51}{49}J_{2,0}q^2 - \frac{117}{392}J_{2,0}^2q. \quad (2)$$

$$q = \frac{\omega^2 a^3}{GM}. \quad (3)$$

Dĺžka vedľajšej polosi b :

$$b = a\sqrt{1 - e^2}. \quad (4)$$

Lineárna excentricita E :

$$E = \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (5)$$

Druhá numerická excentricita e' :

$$e'^2 = \frac{E^2}{b^2}. \quad (6)$$

Sploštenie f :

$$f = \frac{a - b}{a}. \quad (7)$$

Fyzikálne parametre:

Normálové tiažové zrýchlenie na rovníku:

$$\gamma_e = \frac{GM}{ab} \left(1 - m - \frac{m}{6} \frac{e' q'}{q} \right). \quad (8)$$

Normálové tiažové zrýchlenie na póle:

$$\gamma_q = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{m}{3} \frac{e' q'}{q} \right). \quad (9)$$

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}. \quad (10)$$

$$\frac{e' q'}{q} = \frac{21 - 9(e')^2 + 5(e')^4}{7 - 6(e')^2 + 5(e')^4}. \quad (11)$$

Normálové tiažové zrýchlenie na bode:

$$\gamma(\varphi) = \gamma_0 + \delta_{\gamma h}. \quad (12)$$

Somiglianov vzťah:

$$\gamma_0(\varphi, h) = \frac{a \gamma_e \cos^2 \varphi + b \gamma_p \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (13)$$

Zmena normálneho tiažového zrýchlenia s rastúcou výškou:

$$\delta_{\gamma H} = \frac{-2\gamma_0}{a}(1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi)h + \frac{3\gamma_0}{a}H^2. \quad (14)$$

$$k = \frac{b\gamma_q}{a\gamma_e} - 1. \quad (15)$$

Rozdielom medzi skutočným a normálnym tiažovým polom Zeme vzniká anomálne/poruchové tiažové pole Zeme. Opisujú ho tieto veličiny:

- Poruchový potenciál T
- Poruchový tenzor \mathbf{T}
- Porucha tiažového zrýchlenia δg
- Anomália tiažového zrýchlenia Δg

Poruchový potenciál vypočítame ako rozdiel skutočného a normálneho tiažového potenciálu :

$$T(P) = W(P) - U(P) = V_g(P) + V_c(P) - U_g(P) + U_c(P), \quad (16)$$

kde

$W(P)$ - je skutočný tiažový potenciál,

$U(P)$ - je normálny tiažový potenciál,

$V_g(P)$ - je skutočný gravitačný potenciál,

$V_c(P)$ - je skutočný odstredivý potenciál,

$U_c(P)$ - je normálny odstredivý potenciál,

$U_g(P)$ - je normálny gravitačný potenciál.

Následne sme vypočítali poruchy tiažového zrýchlenia $\delta g(P)$ vzorcom:

$$\delta_g(P) = g(P) - \gamma(P), \quad (17)$$

$$\delta_g(P) = g(P) - (\gamma_0(Q_0) + \delta_{\gamma h}), \quad (18)$$

kde

$g(P)$ - je tiažové zrýchlenie,

$\gamma(P)$ - je normálne tiažové zrýchlenie vyjadrené : $\gamma(P) = \gamma_0(Q_0) + \delta_{\gamma h}$,

$\gamma_0(Q_0)$ - je normálne tiažové zrýchlenie v bode Q_0 na povrchu elipsoidu,
 $\delta_{\gamma h}$ - je redukcia normálneho tiažového zrýchlenia z výšky nad elipsoidom.

Rozdielom medzi skutočným tiažovým $g(P)$ a normálnym tiažovým zrýchlením $\gamma(Q)$ v bode Q na teluroide sme vypočítali anomáliu tiažového zrýchlenia Δg :

$$\Delta g = g(P) - \gamma(Q), \quad (19)$$

$$\Delta g = g(P) - (\gamma_0(Q_0) + \delta_{\gamma h}). \quad (20)$$

Anomáliu tiažového zrýchlenia využívame pri určovaní geoidu, kvázigeoidu alebo zvislicových odchýlok, pretože sú základnými veličinami poruchového tiažového poľa.

Poruchový tenzor \mathbf{T} počítame vzorcom:

$$\mathbf{T}(\mathbf{P}) = \mathbf{W}(\mathbf{P}) - \mathbf{U}(\mathbf{P}). \quad (21)$$

Úplné Bouguerové anomálie tiažového zrýchlenia Δg_{UB} :

$$\Delta g_{UB} = \Delta g_{vv} + \delta_{gT}, \quad (22)$$

kde

Δg_{vv} - je anomália tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu,

δ_{gT} - je topografická redukcia.

Topografická redukcia slúži na to, aby sme z gravitačných meraní odstránili vplyv hmoty nad geoidom. Pri výpočte sa uvažuje, že všetky tieto hmoty majú rovnakú hustotu.

$$\Delta g_{UB} = \Delta g_{vv} + \delta g_{SBV} + \delta g_{TOP} \quad (23)$$

kde

δg_{SBV} - je účinok sférickej Bouguerovej vrstvy ($-4\pi G\rho H$),

δg_{TOP} - je topografická korekcia.

Topografická korekcia odstraňuje gravitačný vplyv terénu nad výpočtovým bodom a zároveň kompenzuje chýbajúcu hmotu v sférickej Bouguerovej vrstve.

$$\Delta g_{UB} = \Delta g_{vv} + \delta g_{BD} + \delta g_{TOP} + Bu, \quad (24)$$

kde

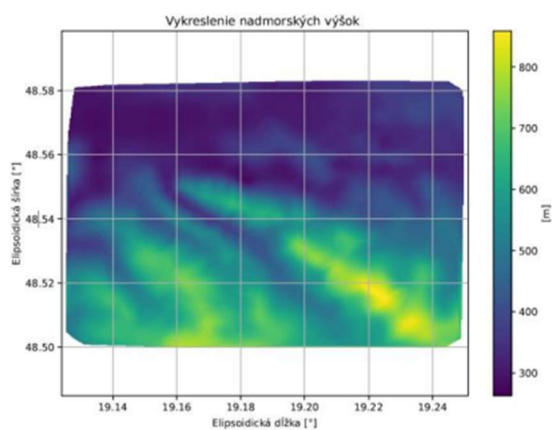
δg_{BD} - je redukcia z Bouguerovej dosky,

Bu - je Bullardov člen. (Účinok zakrivenia Bouguerovej dosky na tiažové zrýchlenie do vzdialenosti 166.7 km.).

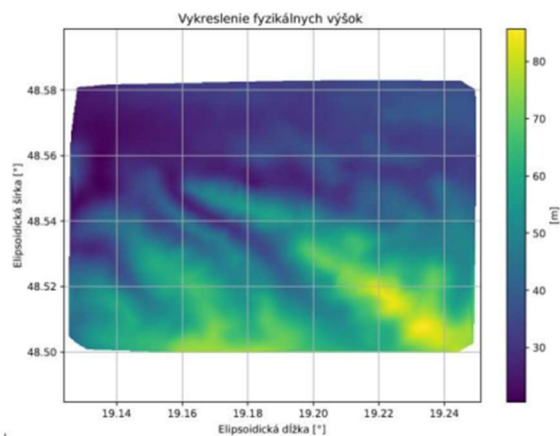
Bouguerová doska je geometrický útvar ohraničený geoidom a ekvipotenciálnou plochou prechádzajúcou výpočtovým bodom v rovinnej aproximácii (geoid a ekvipotenciálna plocha sú nahradené rovinami a ich vzájomná odľahlosť je H). Uvažuje sa, že je plná hmota s konštantnou hustotou.

Tabuľka č.3- Ukážka výsledných hodnôt

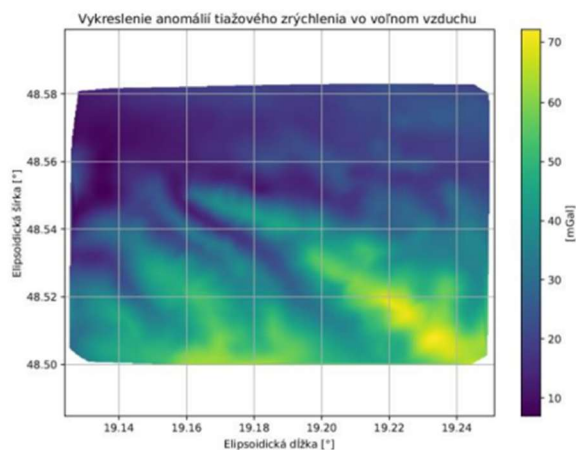
Bod	$\gamma_0[mGal]$	$\delta\gamma_H[mGal]$	$\Delta g [mGal]$	$\delta g_{BD}[mGal]$	$\Delta g_{\bar{U}B} [mGal]$
10	980 839.627	-90.103	11.336	-32.690	-21.342
20	980 839.297	-90.207	10.756	-32.728	-21.951
30	980 839.426	-89.803	10.080	-32.582	-22.438
...					
4850	980 835.696	-93.582	15.336	-33.953	-18.449



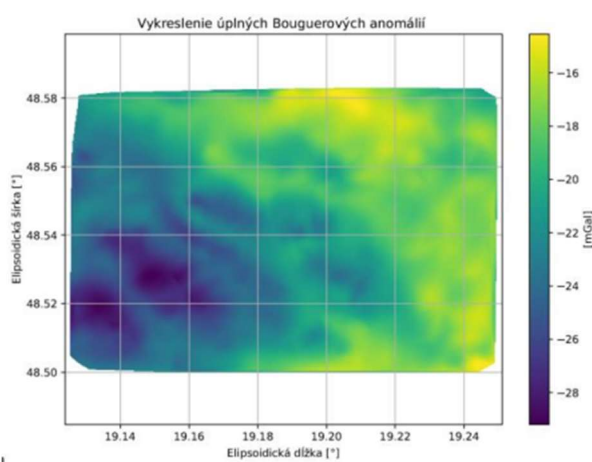
Obr.č.1- Znázornenie nadmorských výšok



Obr.č.2- Znázornenie fyzikálnych výšok



Obr.č.3- Znáznornenie anomálií zrýchlenia vo voľnom vzduchu



Obr.č.4- Znáznornenie úplných Bouguerových anomálií

Úloha č.2

V úlohe č. 2 sme vypočítali anomáliu tiažového zrýchlenia Δg a poruchu tiažového zrýchlenia δg ako v úlohe č.1.

Následne sme vypočítali druhú radiálnu deriváciu poruchového potenciálu T_{rr} :

$$T_{rr} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}. \quad (25)$$

Výšku kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom ζ sme zistili ako:

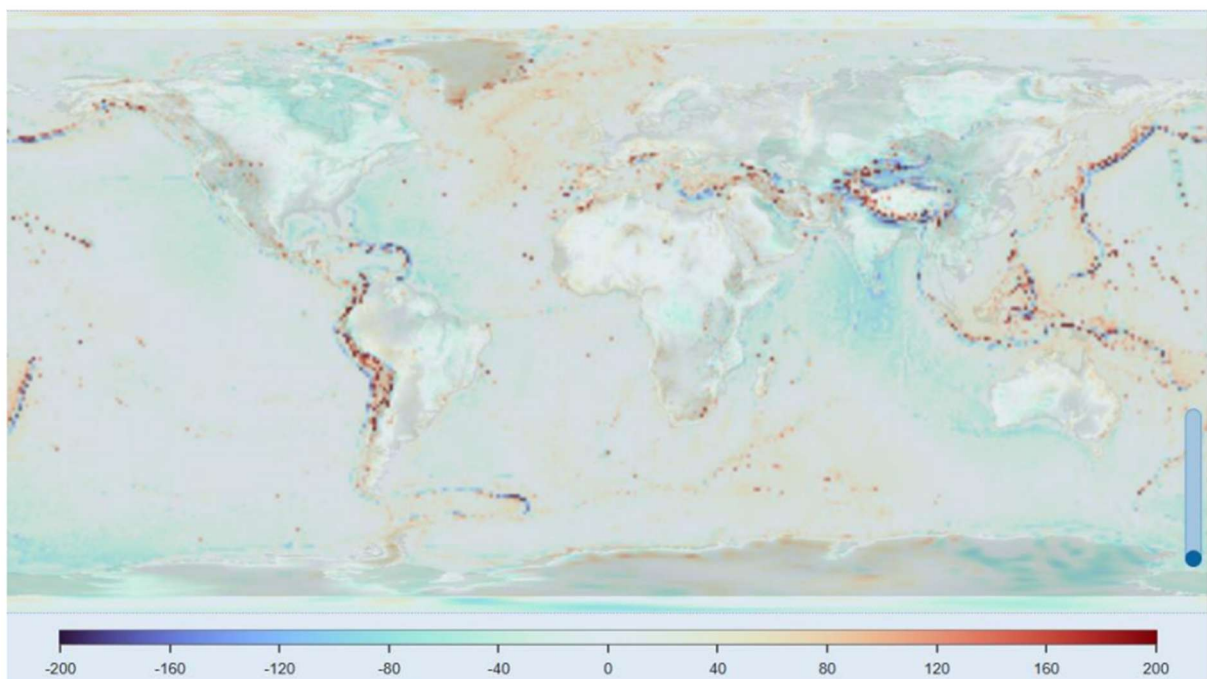
$$\zeta = \frac{T(P)}{\gamma(P)}. \quad (26)$$

Laplaceova diferenciálna rovnica:

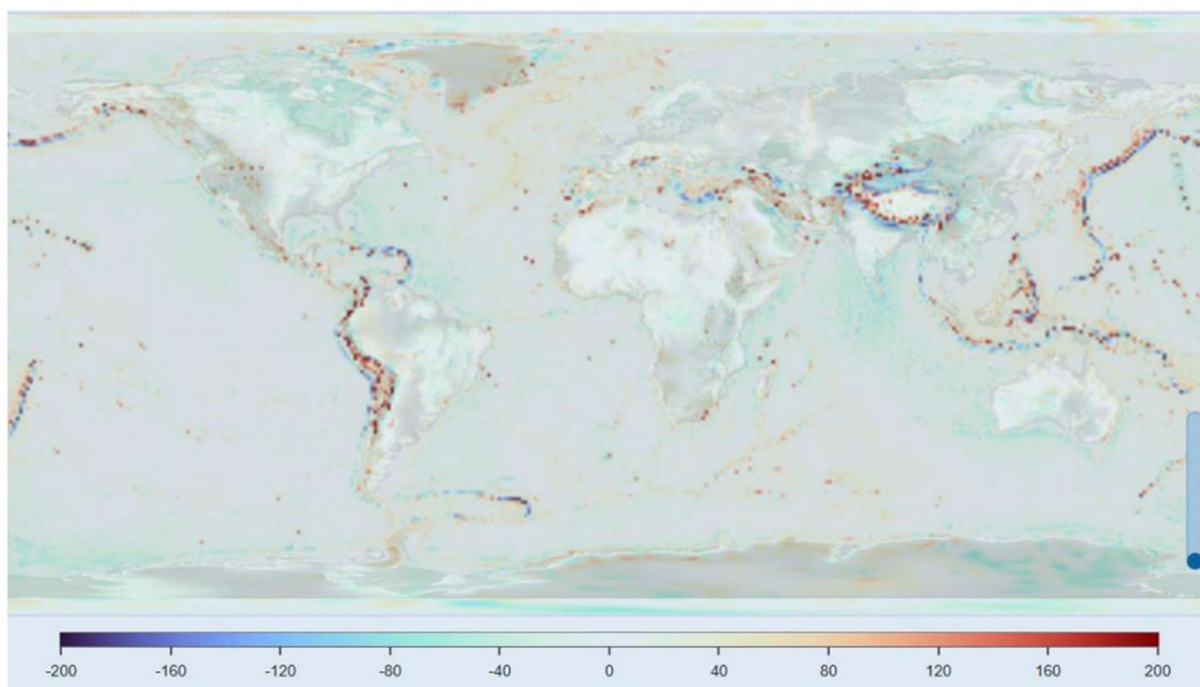
$$\nabla^2 T = \nabla^2 (V_g - U_g) = \nabla^2 V_g - \nabla^2 U_g = 0, \quad (27)$$

$$\nabla^2 T = 0. \quad (28)$$

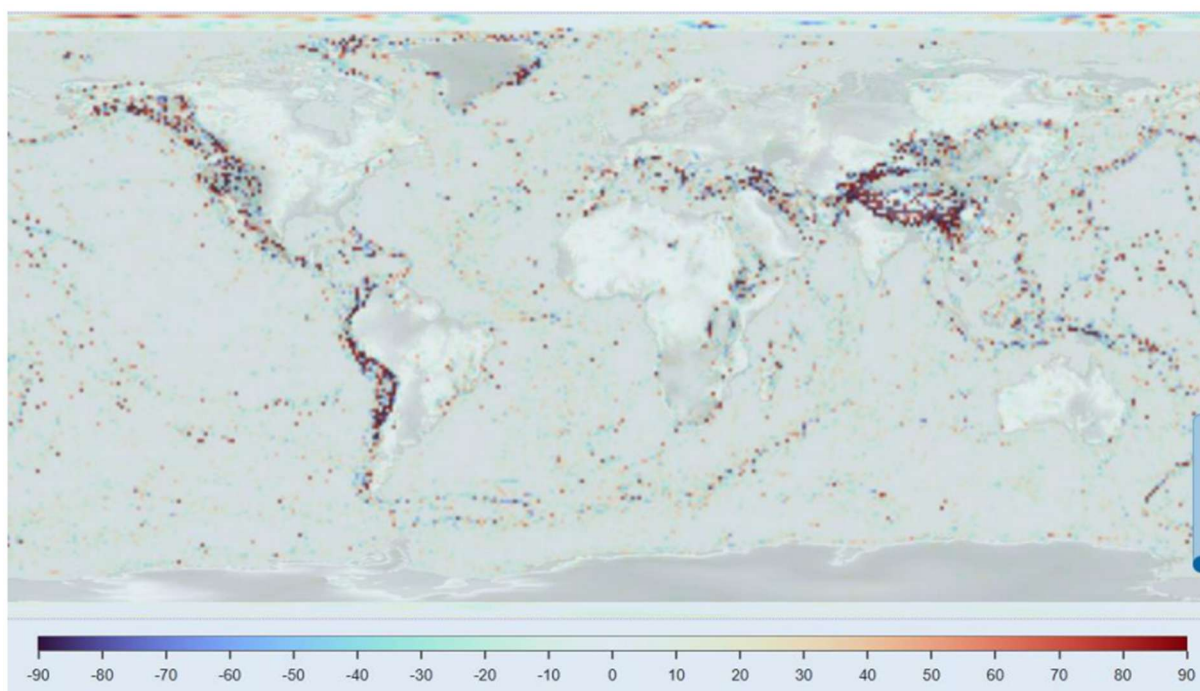
Pri spracovaní druhej časti úlohy č.2 sme využili portál ICGEM, kde sme v časti *Calculation* → *Regular grids* realizovali výpočet geofyzikálnych parametrov na globálnej mriežke. Ako referenčný povrch sme zvolili elipsoid GRS-80, pričom po jeho výbere portál automaticky doplnil všetky potrebné parametre. Následne sme nastavili rozsah výpočtového územia pre celú Zem, so zemepisnou šírkou v intervale od -90° do 90° a zemepisnou dĺžkou od -180° do 180° , pričom sme zvolili krok $1,0^\circ$ pre obe súradnice. Výška nad elipsoidom bola určená ako 0,0 m, pretože sme výpočty vykonávali priamo na jeho povrchu. Po definovaní všetkých vstupných parametrov sme pomocou vybraného globálneho geopotenciálneho modelu GO_CONS_GCF_2_DIR_R6 vypočítali a vizualizovali poruchy a anomálie tiažového zrýchlenia, druhú radiálnu deriváciu poruchového potenciálu a výšku kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom.



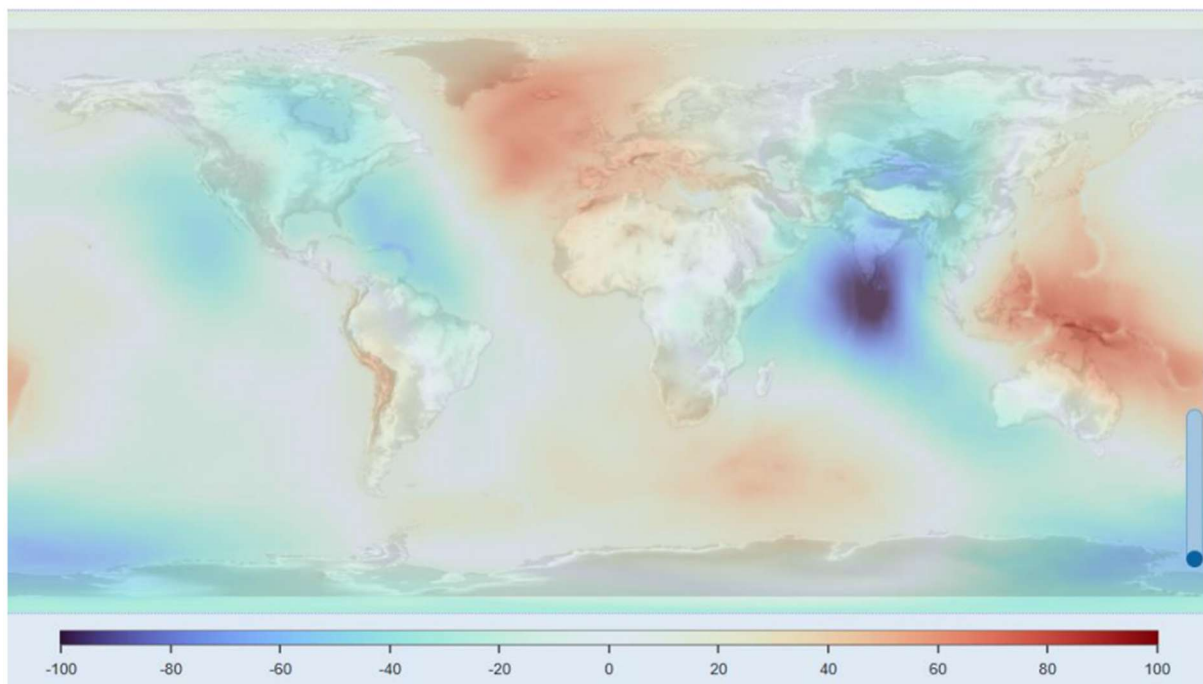
Obr.č.5- Znáznornenie poruchy tiažového zrýchlenia



Obr.č.6- Znáozornenie anomálie tiažového zrýchlenia



Obr.č.7- Znáozornenie druhej radiálnej derivácie poruchového potenciálu



Obr.č.8- Znáznornenie výšky kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom

Záver

V úlohe č. 1 sme sa zaoberali problematikou normálneho tiažového zrýchlenia v závislosti od elipsoidickej a Molodenskej nadmorskej výšky. Na základe týchto hodnôt sme následne vypočítali poruchu a anomáliu tiažového zrýchlenia. Všetky vypočítané hodnoty sme následne graficky znázornili a porovnali s terénom. V 2. úlohe sme sa zamerali na výpočet poruchy tiažového zrýchlenia, anomálie tiažového zrýchlenia, druhej radiálnej derivácie poruchového potenciálu a výšky kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom. Na vizualizáciu výsledkov prvej úlohy sme použili program Anaconda s prostredím Spyder, zatiaľ čo druhú úlohu sme spracovali prostredníctvom webového portálu <https://icgem.gfz-potsdam.de/home>.

V Bratislave,

Dňa 4.12.2025

.....*Bunk*.....

Zoznam použitej literatúry:

[1] BUCHA, B. *Fyzikálna geodézia*. Bratislava: Stavebná fakulta STU, 2023. Dostupné online.

Študijné podklady k zadaniu č.4