

VYHOTOVIL Nicolas GAZDIČ, 3. GAK / 1. krúž.	KONTROLOVAL doc. Ing. Blažej BUCHA PhD.	KATEDRA GEODÉZIE STAVEBNÁ FAKULTA STU RADLINSKÉHO 11 810 05 BRATISLAVA	
NÁZOV: Zadanie č. 5 – Anomálne tiažové pole Zeme, určovanie geoidu a výšlicových odchýlok		FORMÁT	A4
		POČET STRÁN	11
		POČET PRÍLOH	0
		ZADANÉ	18. 11. 2025
		ODOVZDANÉ	16. 12. 2025
FYZIKÁLNA GEODÉZIA 1		HODNOTENIE	KONTROLOVAL

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Stavebná fakulta
Katedra globálnej geodézie a geoinformatiky

Študijný program: **GEODÉZIA A KARTOGRAFIA**

Predmet: **FYZIKÁLNA GEODÉZIA**

Ročník: 3

Ak. rok: 2025/2026

Meno študenta: Nicolas Gazdič

Číslo zadania: 31

**Zadanie č. 5 – Anomálne tiažové pole Zeme, určovanie geoidu
a zvislicových odchýlok**

1. Vypočítajte anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu a úplné Bouguerove anomálie tiažového zrýchlenia v danej lokalite. Vypočítané anomálie graficky znázorníte a porovnáte ich s priebehom terénu.
2. Vypočítajte poruchu tiažového zrýchlenia δg , anomáliu tiažového zrýchlenia Δg , druhú radiálnu deriváciu poruchového potenciálu T_{rr} a výšku kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom ζ v celosvetovom gride s použitím globálneho geopotenciálneho modelu Zeme.

Obsah zadania:

- Text zadania (tento list)

Úloha 1:

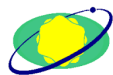
- Ukážka vstupného súboru a mapa polohy meraných bodov
- Tabuľka vypočítaných hodnôt (normálne tiažové zrýchlenie na povrchu elipsoidu GRS-80, zmena normálneho tiažového zrýchlenia s výškou, anomália tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu, redukcia z Bouguerovej dosky, úplná Bouguerova anomália)
- Mapa nadmorských výšok, mapa anomálií tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu, mapa úplných Bouguerových anomálií
- Technická správa (definície, matematické vzťahy, slovný komentár k výsledkom a k využitiu jednotlivých typov anomálií tiažového zrýchlenia v geodézii)

Úloha 2:

- Výsledné hodnoty v 3 ľubovoľne zvolených bodoch gridu
- Grafické znázornenie výsledkov
- Technická správa s definíciami, obrázkami, použitými matematickými vzťahmi a postupom výpočtu

Termín odovzdania zadania: 9. 12. 2025

Zadal: Blažej Bucha



Technická správa

Definovanie úlohy:

S použitím globálneho geopotenciálneho modelu Zeme sme v celosvetovom gride vypočítali poruchu tiažového zrýchlenia δg , anomáliu tiažového zrýchlenia Δg , druhú radiálnu deriváciu poruchového potenciálu T_{rr} a výšku kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom ζ .

Výpočtové a zobrazovacie práce:

Tab. 1 Ukážka vstupných údajov pre úlohu č. 1

Č. b.	$\varphi[^\circ]$	$\lambda[^\circ]$	$h[m]$	$H[m]$	$g[mGal]$	$\Delta g_{top}[mGal]$
10	48,48583	19,00306	777,179	733,19	980766,9	2,89
20	48,48944	19,00417	678,408	634,42	980787,6	2,41
30	48,49222	19,00611	621,277	577,29	980799,8	2,3
40	48,49417	19,00805	586,285	542,3	980807	2,23
50	48,49805	19,00778	545,213	501,23	980815	2,08

Tab. 2 Ukážka vypočítaných hodnôt pre úlohu č. 1

Č. b.	$\gamma_0 [mGal]$	$\delta\gamma_H [mGal]$	$\Delta g [mGal]$	$\delta g_{BD} [mGal]$	$\Delta g_{UB} [mGal]$
10	980934,7	-226,171	980708,6	58,30366	-82,0661
20	980935,1	-195,708	980739,4	48,25323	-71,0107
30	980935,3	-178,086	980757,2	42,61531	-64,6162
40	980935,5	-167,294	980768,2	38,78997	-60,6997
50	980935,8	-154,626	980781,2	33,83298	-56,1028

Kde:

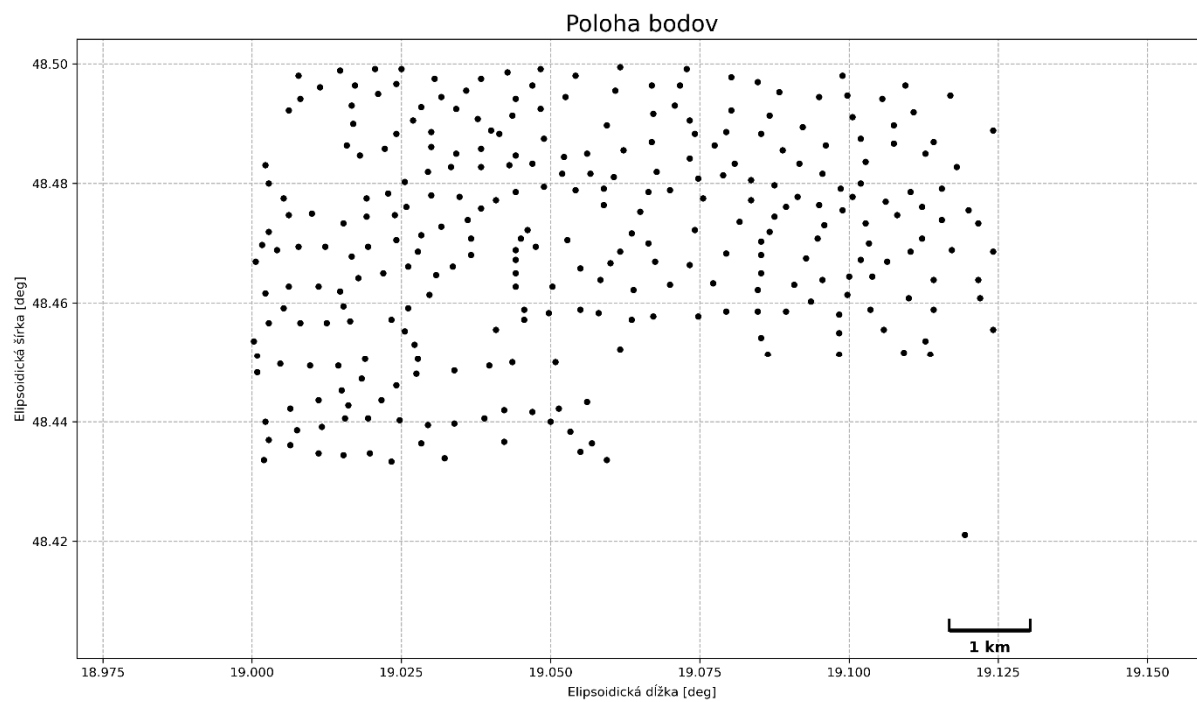
γ_0 – je normálne tiažové zrýchlenie na povrchu elipsoidu,

$\delta\gamma_H$ – je zmena normálneho tiažového zrýchlenia s nadmorskou výškou H ,

Δg – je anomália tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu,

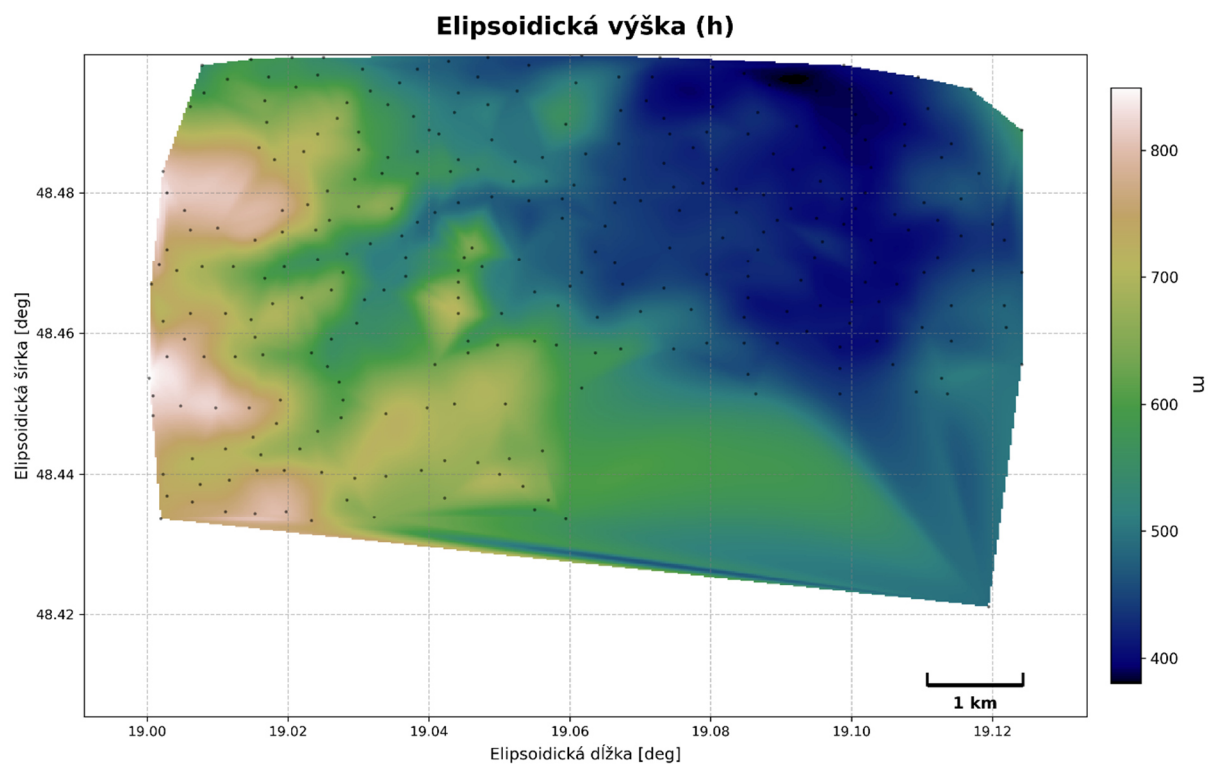
δg_{BD} – je redukcia z Bouguerovej dosky,

Δg_{UB} – je úplná Bouguerová anomália tiažového zrýchlenia.



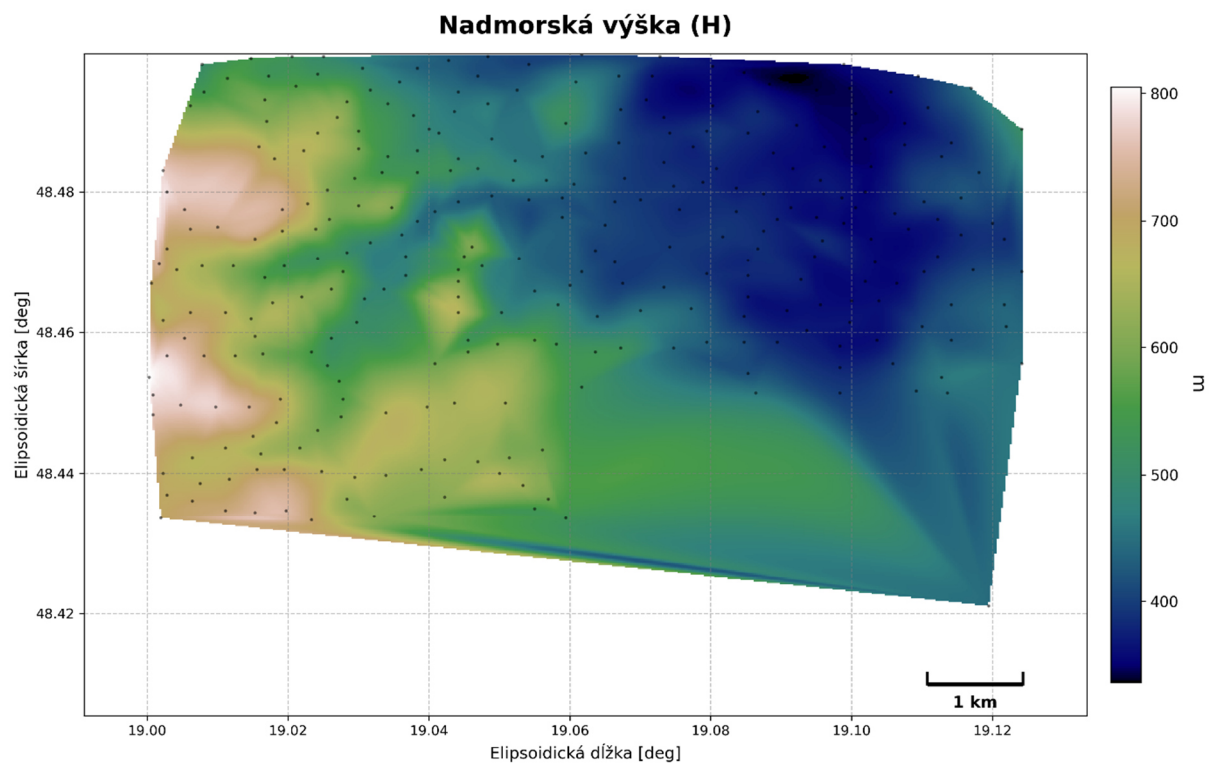
Obr. 0 Grafické znázornenie elipsoidických výšok

Grafické znázornenie výšok a anomálií.



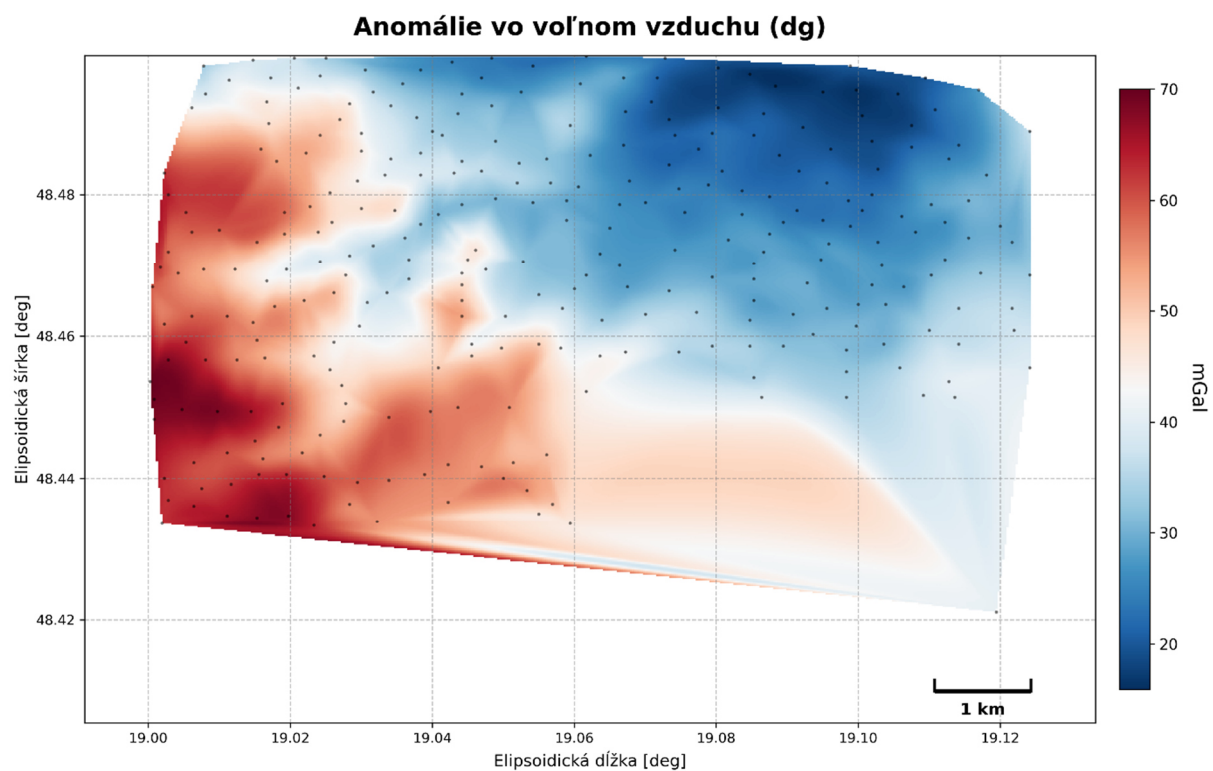
Obr. 1 Grafické znázornenie elipsoidických výšok

Mapa elipsoidických výšok h verne kopíruje reálny reliéf krajiny.



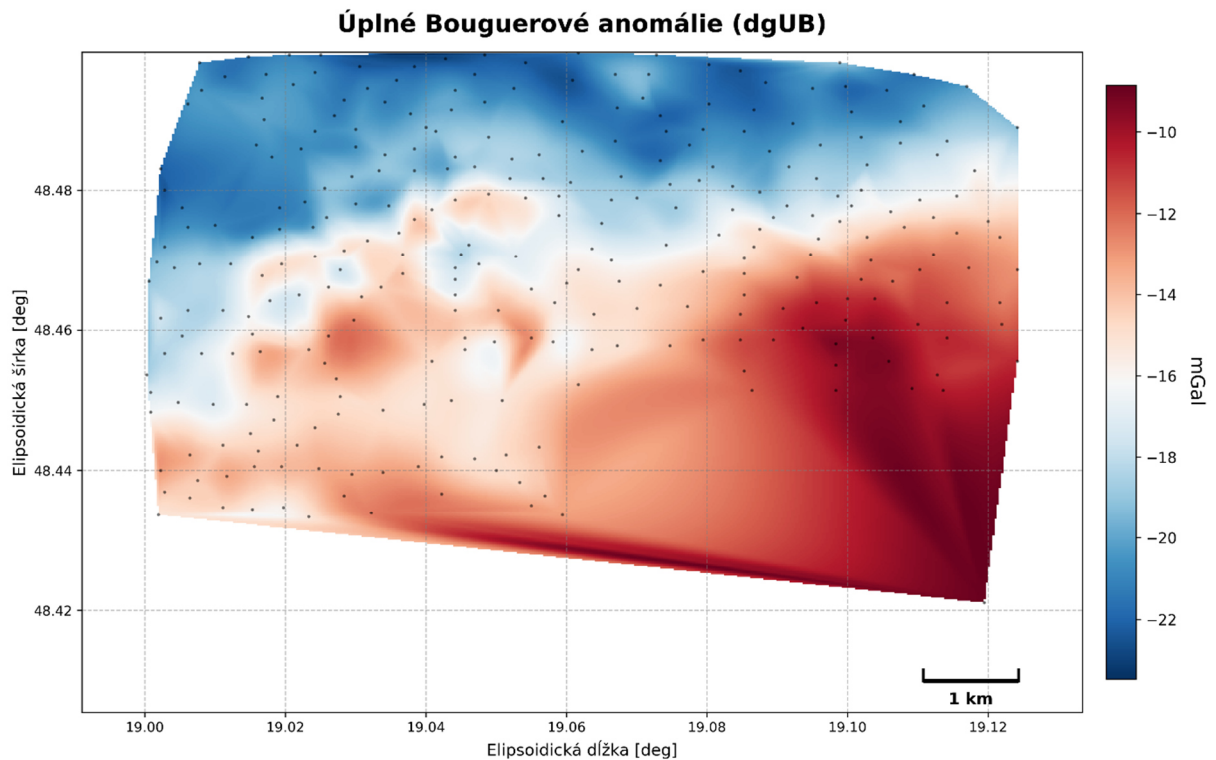
Obr. 2 Grafické znázornenie fyzikálnych výšok

Mapa nadmorských výšok H je vizuálne takmer totožná s mapou elipsoidických výšok, pretože obe verne kopírujú reálny reliéf krajiny.



Obr. 3 Grafické znázornenie anomálií vo voľnom vzduchu

Mapa anomálií vo voľnom vzduchu je podobná mapám výšok, čo je spôsobené gravitačným účinkom topografických hmôt. Maximálna anomália je na vrchoch kopcov a minimálna v údoliach



Obr. 4 Grafické znázornenie úplných Bouguerových anomálií

Mapa úplných Bouguerových anomálií je o vplyv terénu očistená, a preto zobrazuje skryté hustotné nehomogenity v zemskej kôre.

Anomálne poruchové pole vzniká rozdielom medzi skutočným a normálnym tiažovým poľom, pričom fyzikálne parametre anomálneho tiažového poľa Zeme sú:

- Poruchový potenciál $T(P)$ [m^2s^{-2}]
- Porucha tiažového zrýchlenia $\delta g(P)$ [mGal]
- Anomália tiažového zrýchlenia Δg [mGal]
- Poruchový tenzor $T(P)$ [E]

Pre určenie jednotlivých parametrov sme potrebovali vypočítať geometrické a fyzikálne parametre ekvipotenciálneho elipsoidu **GRS80**:

Parameter	Symbol	Hodnota	Jednotka
Dĺžka hlavnej poloosi	a	6 378 137	m
Geocentrická gravitačná konštanta	GM	$3\,986\,005 \cdot 10^8$	$m^3 \cdot s^{-2}$
Zonálny sférický harmonický koeficient	$J_{2,0}$	$108\,263 \cdot 10^{-8}$	—
Uhlová rýchlosť rotácie Zeme	ω	$7\,292\,115 \cdot 10^{-11}$	$rad \cdot s^{-1}$

Vypočítali sme prvú numerickú excedntricitu e pomocou vzťahu:

$$e^2 \approx 3J_{2,0} + q - \frac{9}{14}q^2 - \frac{27}{14}J_{2,0}q + \frac{149}{392}q^3 + \frac{51}{49}J_{2,0}q^2 - \frac{117}{392}J_{2,0}^2q \quad (1)$$

Kde:

q - je pomocný parameter, ktorý je určený vzťahom:

$$q = \frac{\omega^2 - a^3}{GM} \quad (2)$$

Ďalej sme vypočítali dĺžky hlavnej polosi b [m] uvedenú vo vzťahu [m]:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (3)$$

Na to sme vypočítali lineárnu excentricitu E:

$$E = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (4)$$

Následne druhá numerickú excentricitu:

$$e'^2 = \frac{E^2}{b^2} \quad (5)$$

Nakoniec sme vypočítali sploštenie f:

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (6)$$

Vypočítali sme všetky geometrické parametre elipsoidu sme vypočítali fyzikálne parametre ako sú normálne tiažové zrýchlenie a porucha tiažového zrýchlenia, anomália tiažového zrýchlenia a poruchový tenzor.

Výpočet normálneho tiažového zrýchlenia

Normálneho tiažového zrýchlenia na rovníku:

$$\gamma_e = \frac{GM}{ab} \left(1 - m - \frac{m}{6} \cdot \frac{21 - 9(e')^2 + 5(e')^4}{7 - 6(e')^2 + 5(e')^4} \right) \quad (7)$$

Kde:

m - je určený vzťahom:

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \quad (8)$$

Normálneho tiažového zrýchlenia Na póle je :

$$\gamma_p = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{m}{3} \cdot \frac{21 - 9(e')^2 + 5(e')^4}{7 - 6(e')^2 + 5(e')^4} \right) \quad (9)$$

Výpočet somiglianovho vzťahu γ_0 .

$$\gamma_0 = \frac{a \cdot \gamma_e \cdot \cos^2 \varphi + b \cdot \gamma_p \cdot \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (10)$$

Kde:

k má tvar (13).

$$k = \frac{b\gamma_p}{a\gamma_e} - 1 \quad (11)$$

Výpočet zmeny normálneho tiažového zrýchlenia z elipsoidickej výšky h .

$$\delta\gamma_h = \frac{-2\gamma_0}{a}(1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi)h + \frac{3\gamma_0}{a}h^2 \quad (12)$$

Výpočet normálneho tiažového zrýchlenia z elipsoidickej výšky h .

$$\gamma = \gamma_0 + \delta\gamma_h \quad (13)$$

Výpočet zmeny normálneho tiažového zrýchlenia z meranej (nivelovanej) výšky h .

$$\delta\gamma_H = \frac{-2\gamma_0}{a}(1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi)H + \frac{3\gamma_0}{a}H^2 \quad (14)$$

Výpočet normálneho tiažového zrýchlenia z meranej (nivelovanej) výšky h .

$$\gamma = \gamma_0 + \delta\gamma_H \quad (15)$$

Prvých 5 výsledných hodnôt sa nachádzajú v tabuľke č.2.

Jednotlivé časti poruchového poľa vypočítame nasledovne:

a) **Poruchový potenciál T(P):**

Poruchový potenciál T [m^2s^{-2}] je rozdiel medzi skutočným tiažovým potenciálom W [m^2s^{-2}] a normálnym tiažovým potenciálom U [m^2s^{-2}] v danom bode P:

$$T(P) = W(P) - U(P), \quad (16)$$

pričom

$$W(P) = V(P) + V_c(P), \quad (17)$$

$$U(P) = U_g(P) + U_c(P), \quad (18)$$

Kde:

$V(P)$ je skutočný gravitačný potenciál,

$V_c(P)$ je skutočný odstredivý potenciál,

$U_g(P)$ je normálny gravitačný potenciál

$U_c(P)$ je normálny odstredivý potenciál.

b) **Porucha tiažového zrýchlenia $\delta g(P)$:**

Porucha tiažového zrýchlenia je rozdiel medzi skutočným tiažovým zrýchlením g [m s^{-2}] a normálnym tiažovým zrýchlením γ [m s^{-2}] v bode P:

$$\delta g(P) = g(P) - \gamma(P), \quad (19)$$

pričom

$$\gamma(P) = \gamma_0(Q_0) + \delta\gamma_h, \quad (20)$$

kde $\gamma_0(Q_0)$ je normálne tiažové zrýchlenie v bode Q_0 na povrchu elipsoidu,

$\delta\gamma_h$ je redukcia normálneho tiažového zrýchlenia z výšky nad elipsoidom, takže vzťah (20) môžeme napísať ako:

$$\delta g(P) = g(P) - (\gamma_0(Q_0) + \delta\gamma_h). \quad (21)$$

c) Anomália tiažového zrýchlenia Δg :

Anomáliu tiažové zrýchlenia Δg [mGal] vypočítame ako rozdiel medzi skutočným tiažovým zrýchlením $g(P)$ a normálnym tiažovým zrýchlením pre nivelovanú výšku $\gamma(Q)$ [m s⁻²] v bode Q na teluroide:

$$\Delta g = g(P) - \gamma(Q), \quad (22)$$

pričom vzťah môžeme napísať v tvare:

$$\Delta g = g(P) - (\gamma(Q_0) + \delta\gamma_h). \quad (23)$$

Kde ζ je výška kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom,

n_e je normála k referenčnému elipsoidu.

d) Poruchový tenzor $T(P)$:

Poruchový tenzor $T(P)$ vypočítame ako rozdiel medzi skutočným tiažovým tenzorom $V(P)$ a normálnym tiažovým tenzorom $U(P)$:

$$T(P) = V(P) - U(P) \quad (24)$$

Úplná Bouguerova anomália tiažového zrýchlenia Δg_{UB} [mGal]:

Úplná Bouguerova anomália tiažového zrýchlenia je definovaná ako súčet anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu Δg_{vv} a topografickej redukcie δg_T :

$$\Delta g_{UB} = \Delta g_{vv} + \delta g_T \quad (25)$$

V rámci topografickej redukcie matematicky odstraňujeme gravitačné pôsobenie hmôt uložených medzi geoidom a fyzickým povrchom Zeme, pričom vychádzame z predpokladu, že hustota topografických hmôt je konštantná.

$$\Delta g_{UB} = \Delta g_{vv} + \delta g_{SBV} + \delta g_{top}, \quad (26)$$

Kde:

δg_{SBV} - je redukcia zo sférickej Bouguerovej vrstvy,

δg_{top} - je topografická korekcia.

Z geometrického hľadiska chápeme sférickú Bouguerovu vrstvu ako priestor medzi geoidom a hladinovou plochou v bode P (v sférickej aproximácii). Za predpokladu konštantnej hustoty tejto vrstvy vypočítame jej redukciu nasledovne:

$$\Delta g_{UB} = \Delta g_{vv} + \delta g_{BD} + Bu + \delta g_{top}^{0-1667.7km}, \quad (27)$$

Kde:

δg_{BD} je redukcia z Bouguerovej dosky a Bu je Bullardov člen.

V rámci rovinnej aproximácie nahrádzame geoid a ekvipotenciálnu plochu rovinami, čím vytvárame Bouguerovu dosku, teda geometrický útvar s hrúbkou zodpovedajúcou nadmorskej výške H. Následne pri redukcii z Bouguerovej dosky matematicky odstraňujeme gravitačný účinok takto definovanej dosky.

$$\delta g_{BD} = -2\pi G\rho H \doteq -0.1119xH \quad (28)$$

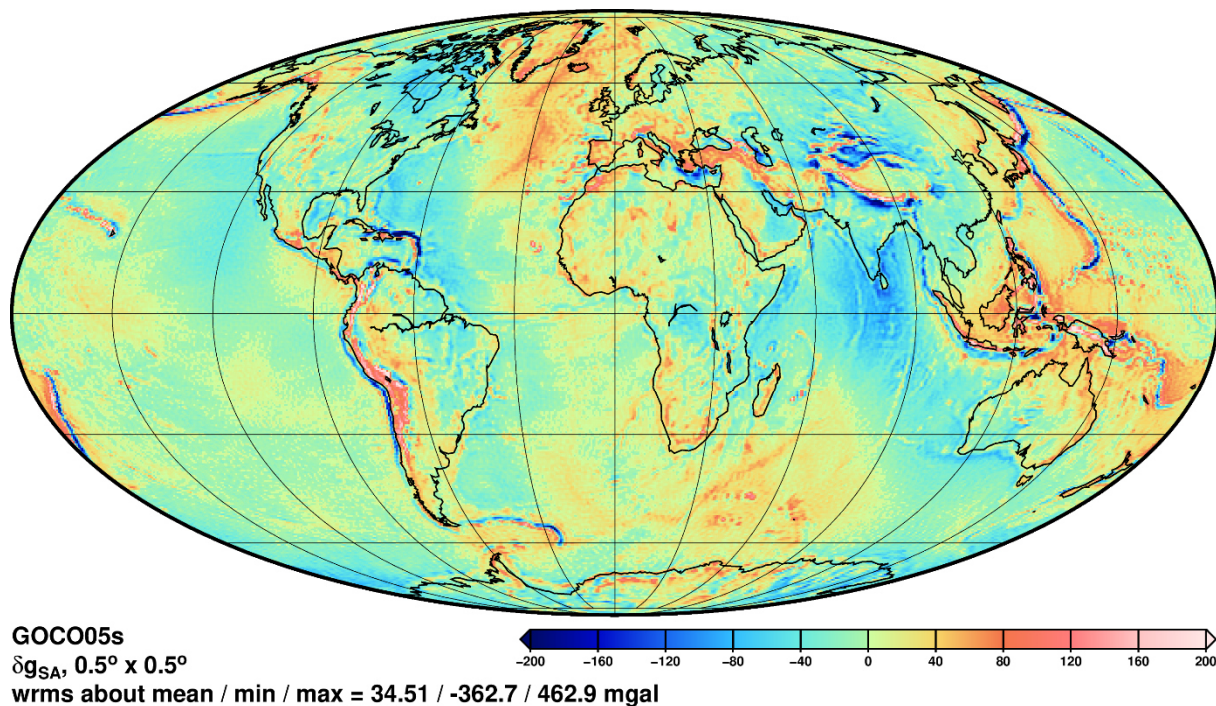
Bullardov člen vyjadruje účinok zakrivenia Bouguerovej dosky na tiažové zrýchlenie do vzdialenosti 166,7 km od výpočtového bodu. Využitie a porovnanie anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu a úplnej Bouguerovej anomálie sa nachádza v Tab. 3.

Tab. 3 – Porovnanie a využitie anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu a úplnej Bouguerovej anomálie

Anomália tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu	Úplná Bouguerová anomália
V geodézií na výpočet geoidu, kvázigeoidu, zvislicových odchýlok	V geodézií na interpoláciu anomálií tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu
Majú členitý priebeh tzn. sú silno lokálne korelované s priebehom terénu	V geofyzike sa využíva na detekciu hustotných nehomogenít
	Majú hladší priebeh (sú slabo lokálne korelované s priebehom terénu)
Na území SR nadobúdajú prevažne kladné hodnoty	Na území SR nadobúdajú kladné aj záporné hodnoty

V úlohe č. 2 sme s použitím globálneho geopotenciálneho modelu Zeme GOCO05s vypočítali parametre pre tri zvolené body na referenčnom elipsoide. Konkrétne sme určili hodnoty tiažovej poruchy δg , anomáliu tiažového zrýchlenia Δg , druhú radiálnu deriváciu poruchového potenciálu T_{rr} a výšku nad referenčným elipsoidom ζ v celosvetovom gride s použitím globálneho geopotenciálneho modelu Zeme pre 3 body na referenčnom elipsoide GOCO05s.

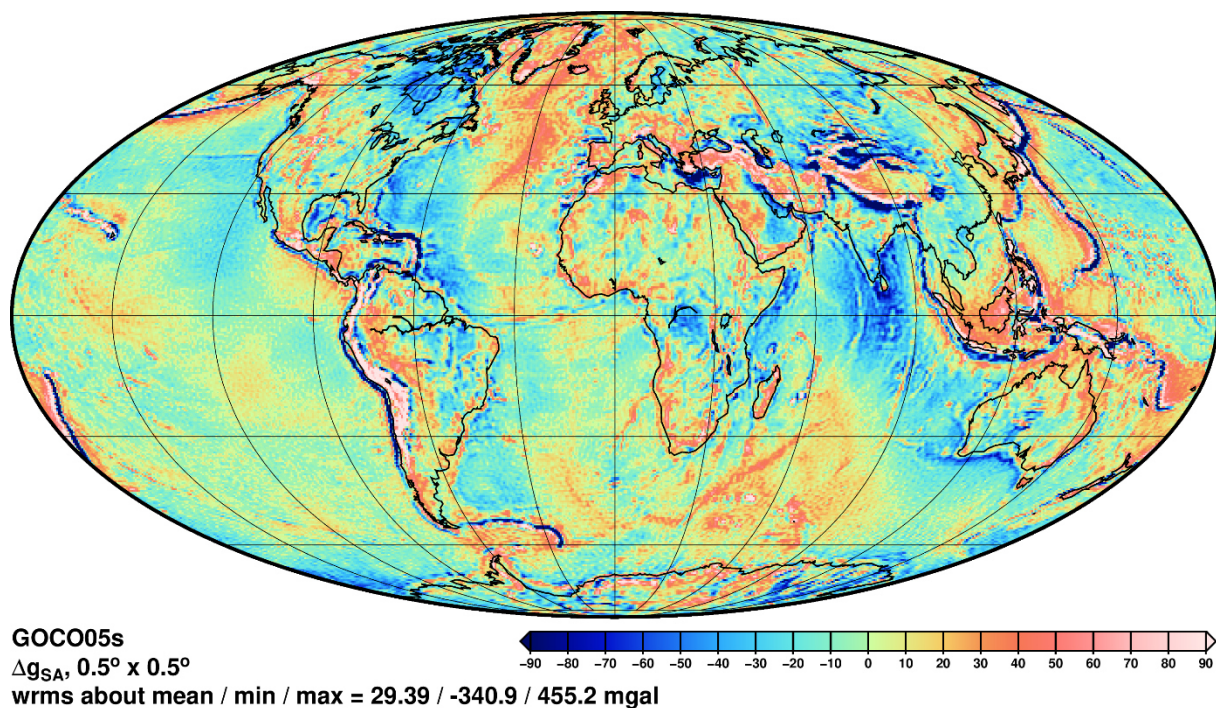
Na stránke: <https://icgem.gfz-potsdam.de/home> sme v časti Calculation a Regular grids mali vybrať ľubovoľný referenčný elipsoid na ktorom výpočty vykonáme. V našom zadaní sme si vybrali elipsoid GOCO05s. Následne sme navolili rozsah územia na ktorom sme vykonali výpočet (v našom prípade to bolo zemepisná šírka od $-90^\circ; 90^\circ$ a zemepisná dĺžka od $-180^\circ; 180^\circ$) grafické výsledky jednotlivých znázornení sa nachádzajú na obrázkoch č. 5-8.



ICGEM, GFZ Potsdam, Mon Dec 8 11:59:05 2025

Obrázok č.5 Zobrazenie tiažového zrýchlenia

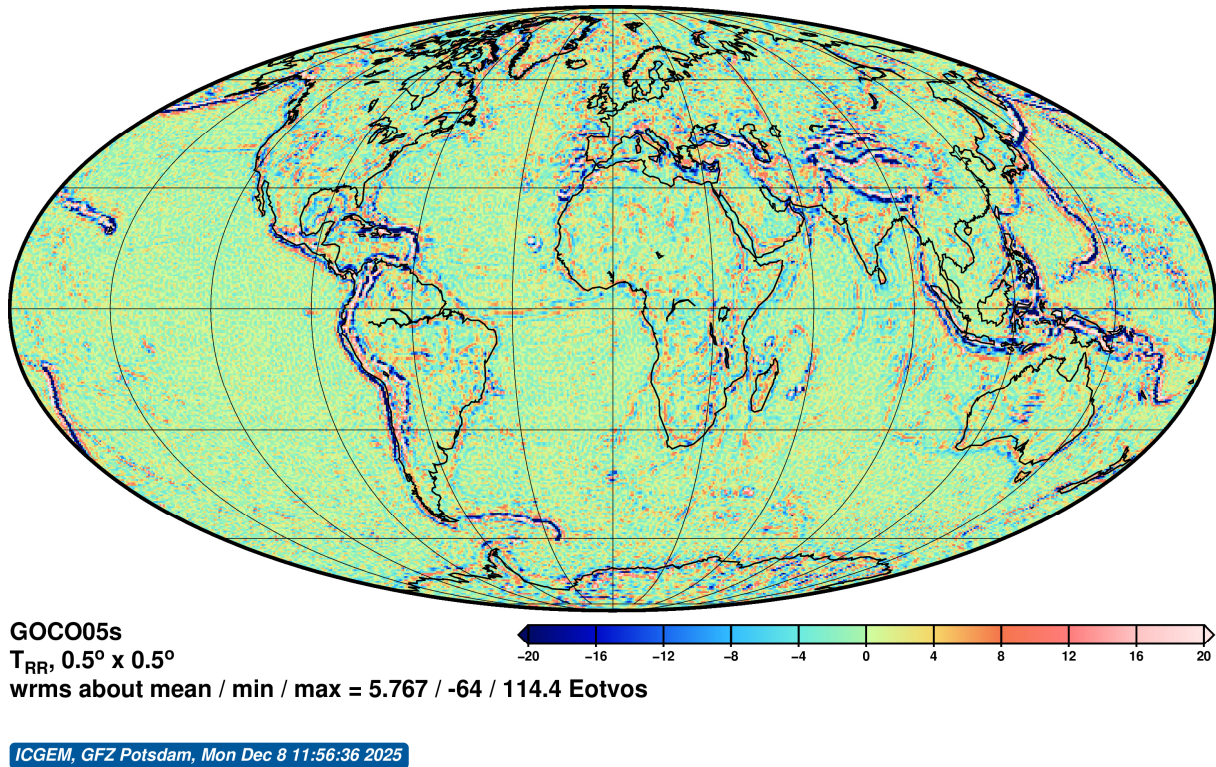
Na obrázku je zobrazená celosvetová mapa anomálií tiažového zrýchlenia vypočítaná z globálneho geopotenciálneho modelu GOCO05s s rozlíšením $0,5^\circ$. Hodnoty sa pohybujú v rozmedzí od -362,7 do +462,9 mGal, pričom modré oblasti predstavujú záporné anomálie (nižšie tiažové zrýchlenie), zelené oblasti hodnoty blízke nule a žlté až červené oblasti kladné anomálie (vyššie tiažové zrýchlenie). Mapa odhaľuje hustotné nehomogenity v zemskej kôre, kde sú výrazné záporné anomálie viditeľné pozdĺž oceánskych chrbtov a kladné anomálie v oblastiach s vyššou hustotou horninového podložja.



ICGEM, GFZ Potsdam, Mon Dec 8 11:59:12 2025

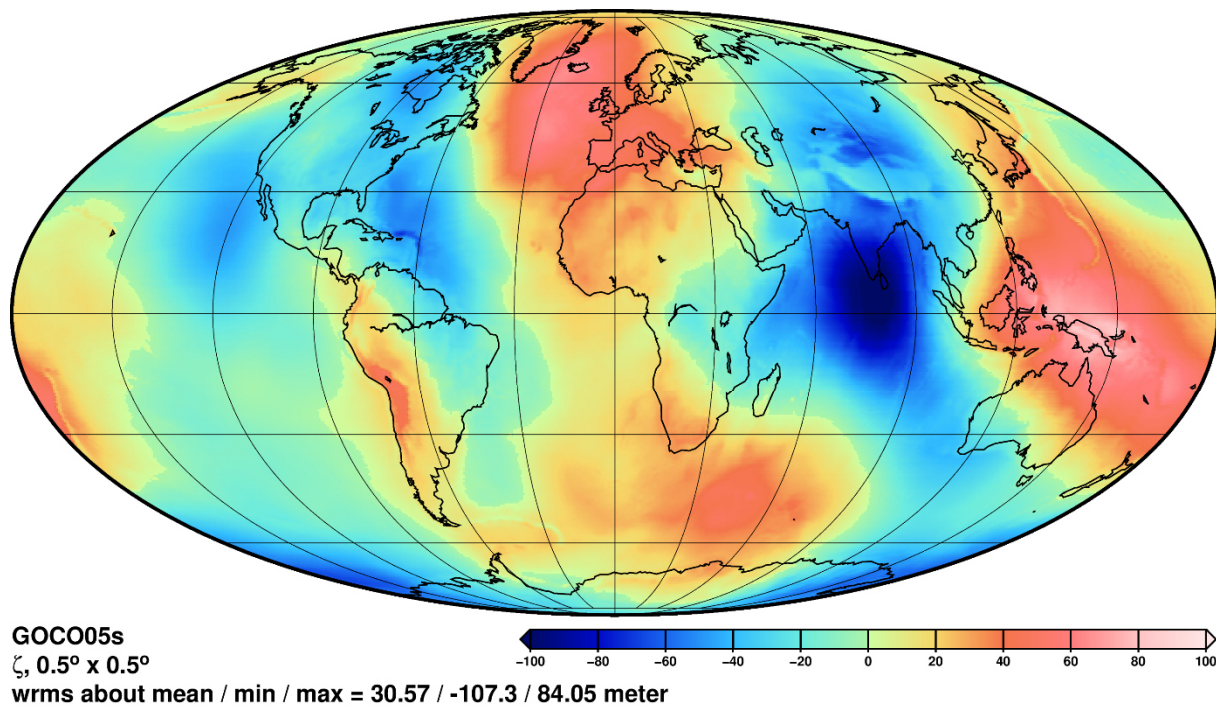
Obrázok č.6 Anomália tiažového zrýchlenia

Na obrázku je zobrazená celosvetová mapa anomálií tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu (Δg_{SA}) vypočítaná z globálneho geopotenciálneho modelu GOCO05s s rozlíšením $0,5^\circ$, kde hodnoty sa pohybujú v rozmedzí od $-340,9$ do $+455,2$ mGal. Mapa zobrazuje gravitačné anomálie, kde modré oblasti predstavujú záporné hodnoty typické pre oceánske panvy a stredooceánske chrbty, zatiaľ čo žlté až červené oblasti predstavujú kladné anomálie vyskytujúce sa najmä v horských oblastiach a regiónoch s vyššou hustotou zemskej kôry.



Obrázok č.7 Druhá radiálna derivácia poruchového potenciálu

Na obrázku je zobrazená celosvetová mapa druhej radiálnej derivácie poruchového potenciálu (T_{RR}) z modelu GOCO05s s hodnotami v rozmedzí od -64 do $+114,4$ Eötvös, kde prevládajú hodnoty blízke nule (zelená farba) s lokálnymi extrémami pozdĺž tektonických štruktúr a oblastí s výraznými hustotnými kontrastami.



Obrázok č.8 Výška kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom

Na obrázku je zobrazená celosvetová mapa výšky kvázigeoidu (ζ) nad referenčným elipsoidom GOCO05s s hodnotami v rozmedzí od -107,3 do +84,05 metra, kde sú výrazné depresie viditeľné v oblasti Indického oceána (modré) a elevácie v severnej časti Atlantiku a okolo Indonézie (červeno-oranžové).

Záver:

V rámci tejto práce sme s použitím globálneho geopotenciálneho modelu GOCO05s vypočítali a analyzovali základné parametre anomálneho tiažového poľa Zeme vrátane poruchy tiažového zrýchlenia, anomálií vo voľnom vzduchu, úplných Bouguerových anomálií, druhej radiálnej derivácie poruchového potenciálu a výšky kvázigeoidu v celosvetovom gride. Výsledky potvrdili očakávané rozloženie gravitačných anomálií, kde anomálie vo voľnom vzduchu korelujú s reliéfom, zatiaľ čo Bouguerové anomálie odhaľujú hustotné nehomogenity v zemskej kôre. Grafické vizualizácie jednotlivých parametrov poskytujú prehľadný obraz o globálnom rozložení tiažového poľa Zeme a jeho variáciách.

V Bratislave dňa 16.12.2025

Nicolas Gazdič

Zdroje:

BUCHA, B. 2023. *Fyzikálna geodézia*. <https://www.svf.stuba.sk/>