

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Stavebná fakulta
Katedra globálnej geodézie a geoinformatiky

Študijný program: **GEODÉZIA A KARTOGRAFIA**

Predmet: **FYZIKÁLNA GEODÉZIA**

Ročník: 3

Ak. rok: 2025/2026

Meno študenta: Michal Ladislav

Číslo zadania: 20

**Zadanie č. 5 – Anomálne tiažové pole Zeme, určovanie geoidu
a zvislicových odchýlok**

1. Vypočítajte anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu a úplné Bouguerove anomálie tiažového zrýchlenia v danej lokalite. Vypočítané anomálie graficky znázorníte a porovnáte ich s priebehom terénu.
2. Vypočítajte poruchu tiažového zrýchlenia δg , anomáliu tiažového zrýchlenia Δg , druhú radiálnu deriváciu poruchového potenciálu T_{rr} a výšku kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom ζ v celosvetovom gride s použitím globálneho geopotenciálneho modelu Zeme.

Obsah zadania:

- Text zadania (tento list)

Úloha 1:

- Ukážka vstupného súboru a mapa polohy meraných bodov
- Tabuľka vypočítaných hodnôt (normálne tiažové zrýchlenie na povrchu elipsoidu GRS-80, zmena normálneho tiažového zrýchlenia s výškou, anomália tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu, redukcia z Bouguerovej dosky, úplná Bouguerova anomália)
- Mapa nadmorských výšok, mapa anomálií tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu, mapa úplných Bouguerových anomálií
- Technická správa (definície, matematické vzťahy, slovný komentár k výsledkom a k využitiu jednotlivých typov anomálií tiažového zrýchlenia v geodézii)

Úloha 2:

- Výsledné hodnoty v 3 ľubovoľne zvolených bodoch gridu
- Grafické znázornenie výsledkov
- Technická správa s definíciami, obrázkami, použitými matematickými vzťahmi a postupom výpočtu

Termín odovzdania zadania: 9. 12. 2025

Zadal: Blažej Bucha

Technická správa

Úvod: V prvej úlohe zadania sme mali za úlohu vypočítať anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu a úplné bougerové anomálie tiažového zrýchlenia v danej lokalite pričom ich graficky znázorniť a porovnať ich s priebehom terénu. Zadané sme mali: čísla bodov a k nim prislúchajúce elipsoidické súradnice, fyzikálna výška, tiažové zrýchlenie a hodnotu topografickej korekcie.

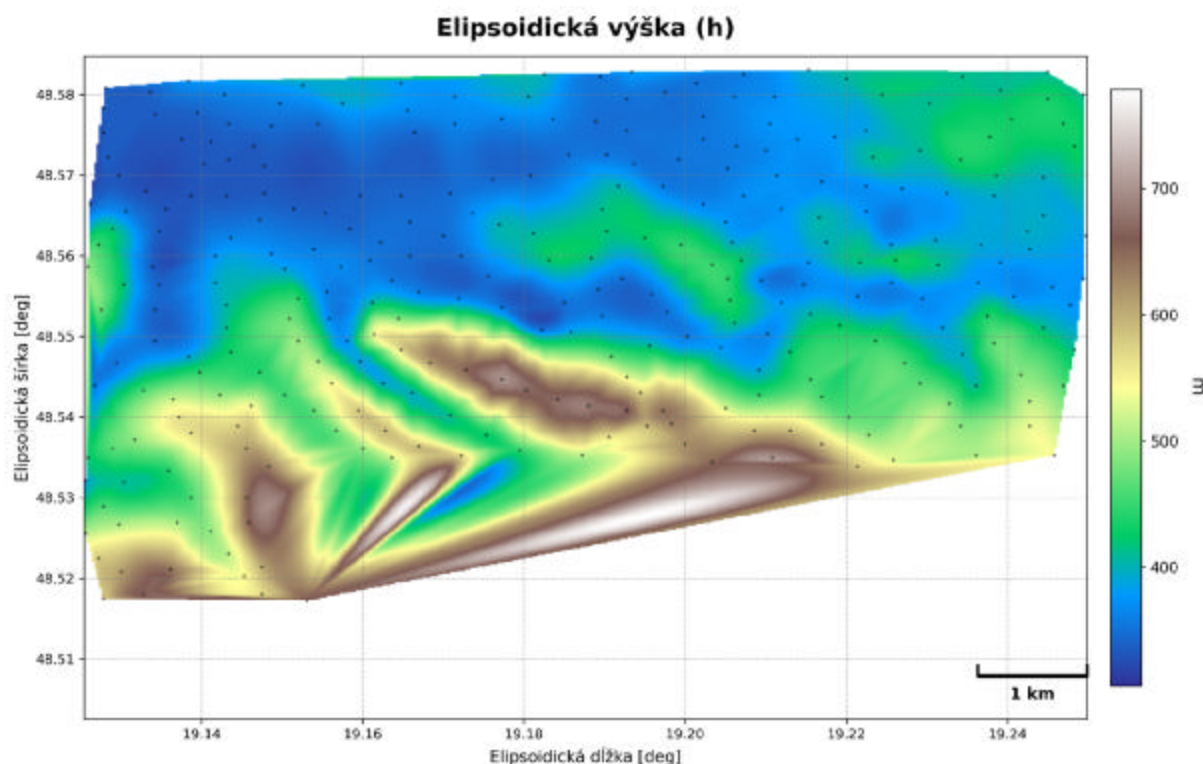
V druhej úlohe sme vypočítali hodnoty tiažového zrýchlenia δg , anomáliu tiažového zrýchlenia Δg , druhú radiálnu deriváciu poruchového potenciálu T_{rr} a výšku nad referenčným elipsoidom ζ v celosvetovom gride s použitím globálneho geopotenciálneho modelu Zeme pre 3 body na referenčnom elipsoide GOCO05s.

1)

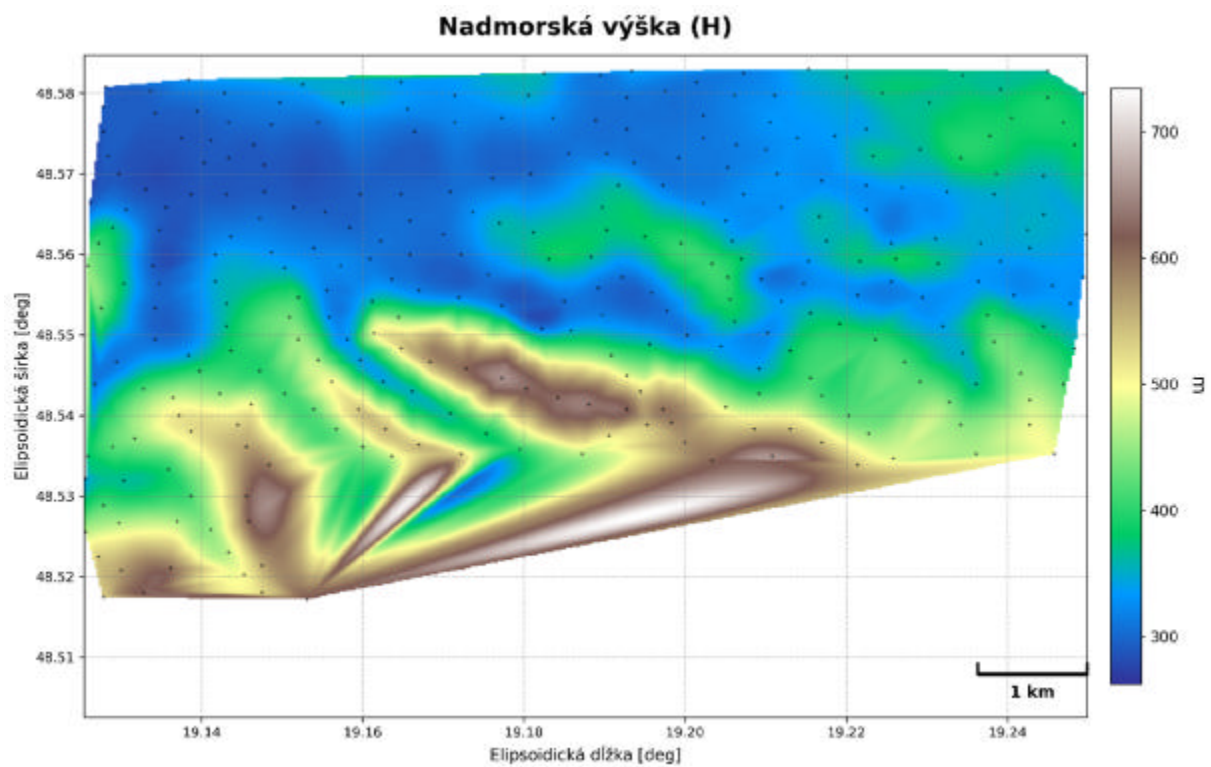
Vstupné dáta sme uviedli do tabuľky (Tab. 1). Zo vstupných dát sme vypočítali normálne tiažové zrýchlenie na povrchu elipsoidu, zmena normálneho tiažového zrýchlenia s nadmorskou výškou H , Anomália tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu, redukcia z Bougerovej dosky a úplná Bougerova anomália tiažového zrýchlenia.

Tab. 1 Vstupné údaje pre úlohu č. 1

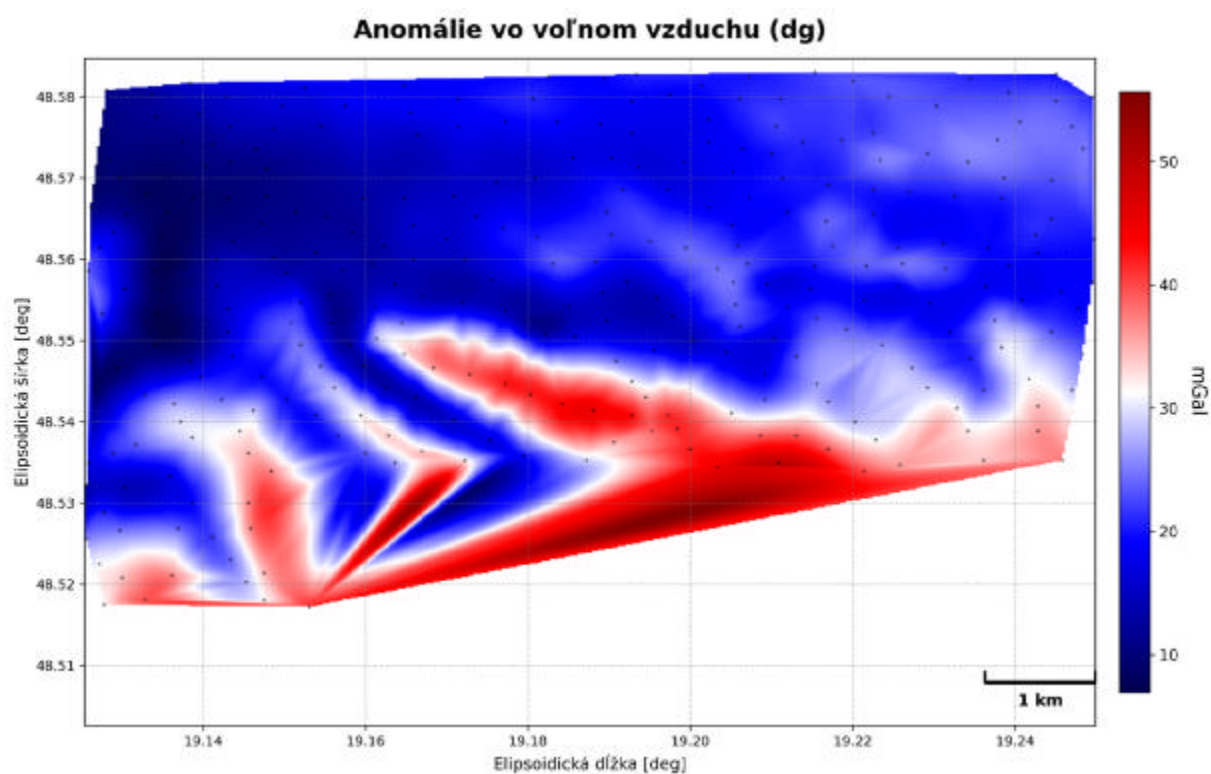
Č. b.	$\phi[^\circ]$	$\lambda[^\circ]$	$h[m]$	$H[m]$	$g[mGal]$	$\Delta g_{top}[mGal]$
10	48,58083	19,12806	335,961	292,06	980864,5	0,41
20	48,57833	19,12778	336,302	292,4	980863,6	0,42
30	48,57528	19,12778	334,995	291,09	980863,1	0,46
40	48,57222	19,12833	336,767	292,86	980862,1	0,54
50	48,57	19,12972	331,339	287,43	980863	0,58



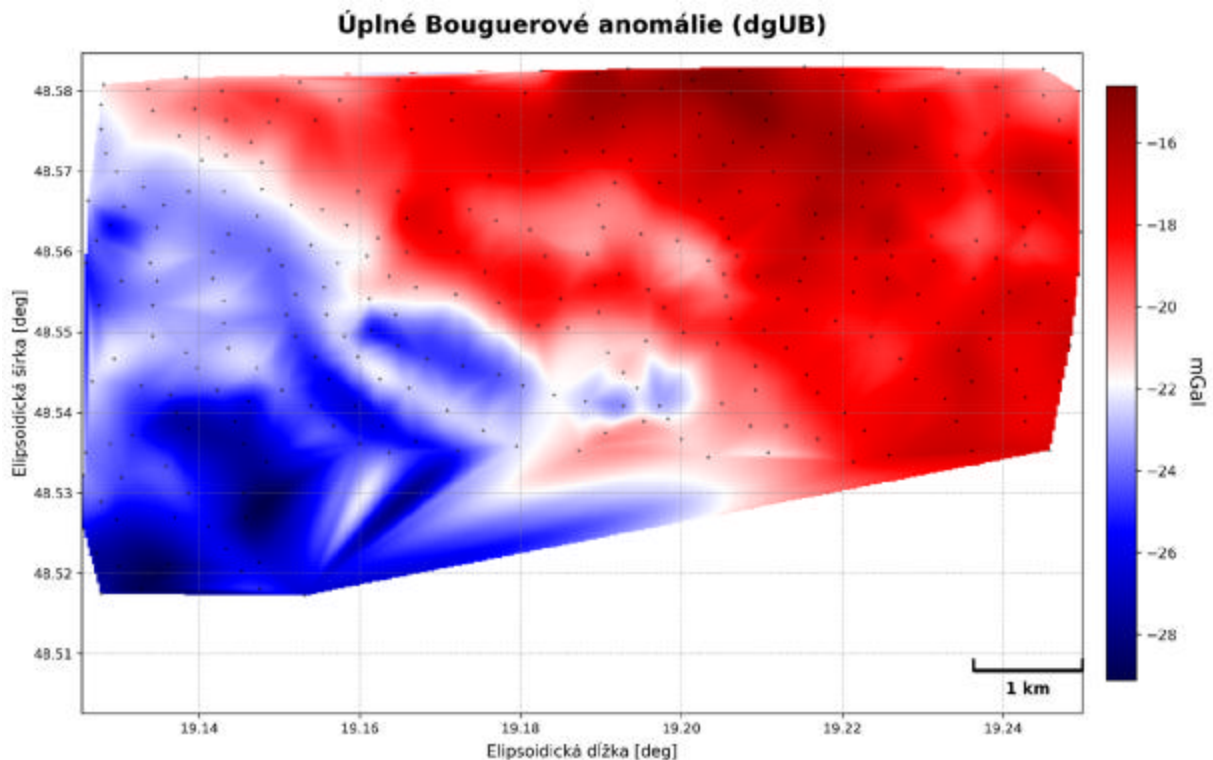
Obr. 1 Grafické zobrazenie elipsoidických výšok



Obr. 2 Grafické zobrazenie fyzikálnych výšok



Obr. 3 Grafické znázornenie anomálií vo voľnom vzduchu



Obr. 4 Grafické znázornenie úplných Bouguerových anomálií

Popis obrázkov:

Na obrázku 1 a 2 pre mapy nadmorských výšok H je vidno, že obrázky sú takmer identické, pretože kopírujú reálny reliéf krajiny. Obrázky 3 a 4, ktoré zase zodpovedajú mapám anomálií vo voľnom vzduchu sú podobné, kvôli gravitačným účinkom topografických hmôt. Mapa úplných Bouguerových anomálií tento vplyv terénu triedi a zobrazuje tak skryté nehomogenity v zemskej kôre.

Pre pokračovanie sme si potrebovali určiť fyzikálne parametre anomálneho tiažového poľa Zeme a to:

- Poruchový potenciál $T(P)$ [m^2s^{-2}],
- Porucha tiažového zrýchlenia $\delta g(p)$ [mGal],
- Anomália tiažového zrýchlenia Δg [mGal],
- Poruchový tenzor $T(P)$ [E].

Ako ďalší krok sme potrebovali vypočítať geometrické a fyzikálne parametre ekvipotencionálneho elipsoidu GRS80:

- Dĺžka hlavnej polosi: $a = 6\,378\,137$ m,
- Newtonova gravitačná konštanta: $GM = 3\,986\,005 \cdot 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$,
- Sféricový harmonický koeficient: $J_{2,0} = 108\,263 \cdot 10^{-8}$,
- Uhlová rýchlosť rotácie Zeme: $\omega = 7\,292\,115 \cdot 10^{-11} \text{ rad s}^{-1}$

S danými hodnotami tak môže pristúpiť k výpočtu, kde začneme prvou numerickou excentricitou e :

$$e^2 \approx 3J_{2,0} + q - \frac{9}{14}q^2 - \frac{27}{14}J_{2,0}q + \frac{149}{392}q^3 + \frac{51}{49}J_{2,0}q^2 - \frac{117}{392}J_{2,0}^2q, \quad (1)$$

kde:

q ... pomocný parameter, ktorý vypočítame následovne:

$$q = \frac{\omega^2 a^3}{GM}, \quad (2)$$

Následne sme vypočítali dĺžky vedľajšej polosi b [m] (3), lineárnu excentricitu E (4), druhú lineárnu excentricitu e' (5) a sploštenie f (6):

$$b = a\sqrt{1 - e^2}, \quad (3)$$

$$E = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad (4)$$

$$e'^2 = \frac{E^2}{b^2}, \quad (5)$$

$$f = \frac{a - b}{a}, \quad (6)$$

Po určení geometrických parametrov elipsoidu sme tak mohli pristúpiť k výpočtu fyzikálnych parametrov:

Výpočet normálneho tiažového zrýchlenia

Na rovníku:

$$\gamma_e = \frac{GM}{ab} \left(1 - m - \frac{m}{6} \cdot \frac{21 - 9(e')^2 + 5(e')^4}{7 - 6(e')^2 + 5(e')^4} \right), \quad (7)$$

kde:

m ... určíme nasledovne:

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}, \quad (8)$$

Na póle:

$$\gamma_p = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{m}{3} \cdot \frac{21 - 9(e')^2 + 5(e')^4}{7 - 6(e')^2 + 5(e')^4} \right), \quad (9)$$

Pokračovali sme výpočtom somiglianového vzťahu γ_0 :

$$\gamma_0 = \frac{a \cdot \gamma_e \cdot \cos^2 \varphi + b \cdot \gamma_p \cdot \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (10)$$

kde:

k ... má nasledujúci tvar:

$$k = \frac{b\gamma_p}{a\gamma_e} - 1, \quad (11)$$

Výpočet zmeny normálneho tiažového zrýchlenia z elipsoidickej výšky h :

$$\delta\gamma_h = \frac{-2\gamma_0}{a}(1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi)h + \frac{3\gamma_0}{a}h^2, \quad (12)$$

Pokračujeme výpočtom normálneho tiažového zrýchlenia z elipsoidickej výšky h :

$$\gamma = \gamma_0 + \delta\gamma_h, \quad (13)$$

Výpočet zmeny normálneho tiažového zrýchlenia z meranej (nivelovanej) výšky h :

$$\delta\gamma_H = \frac{-2\gamma_0}{a}(1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi)H + \frac{3\gamma_0}{a}H^2, \quad (14)$$

Pomocou vzorca (14) tak vieme vypočítať normálne tiažového zrýchlenia z meranej (nivelovanej) výšky h :

$$\gamma = \gamma_0 + \delta\gamma_H, \quad (15)$$

Prvých 5 vypočítaných hodnôt sme uviedli do tabuľky (Tab. 2).

Tab. 2 Vypočítané hodnoty pre úlohu č. 1

Č. b.	γ_0 [mGal]	$\delta\gamma_H$ [mGal]	Δg [mGal]	δg_{BD} [mGal]	$\Delta g_{\acute{U}B}$ [mGal]
10	980943,3	-90,103	11,336	-32,69033	-21,3421
20	980943	-90,207	10,756	-32,72838	-21,9506
30	980942,8	-89,803	10,08	-32,58175	-22,4379
40	980942,5	-90,349	9,927	-32,77987	-22,7118
50	980942,3	-88,674	9,409	-32,17209	-22,5754

kde:

γ_0 – Normálne tiažové zrýchlenie na povrchu elipsoidu,

$\delta\gamma_H$ – Zmena normálneho tiažového zrýchlenia s nadmorskou výškou H ,

Δg – Anomália tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu,

δg_{BD} – Redukcia z Bouguerovej dosky,

$\Delta g_{\acute{U}B}$ – Úplná Bouguerova anomália tiažového zrýchlenia.

Teraz môžeme pristúpiť k samotnému výpočtu jednotlivých častí poruchového poľa:

Poruchový potenciál $T(P)$:

Je to rozdiel medzi skutočným tiažovým potenciálom W [m^2s^{-2}] a normálnym tiažovým potenciálom U [m^2s^{-2}] v danom bode P :

$$T(P) = W(P) - U(P), \quad (16)$$

Platí:

$$W(P) = V(P) + V_c(P) , \quad (17)$$

$$U(P) = U_g(P) + U_c(P), \quad (18)$$

kde:

$V(P)$... skutočný gravitačný potenciál,

$V_c(P)$... skutočný odstredivý potenciál,

$U_g(P)$... normálny gravitačný potenciál,

$U_c(P)$... normálny odstredivý potenciál.

Porucha tiažového zrýchlenia $\delta g(P)$:

Je to rozdiel medzi skutočným tiažovým zrýchlením g [m s^{-2}] a normálnym tiažovým zrýchlením γ [m s^{-2}] v bode P:

$$\delta g(P) = g(P) - \gamma(P) , \quad (19)$$

Pričom platí:

$$\gamma(P) = \gamma_0(Q_0) + \delta\gamma_h , \quad (20)$$

kde:

$\gamma_0(Q_0)$... normálne tiažové zrýchlenie v bode Q_0 na povrchu elipsoidu,

$\delta\gamma_h$... redukcia normálneho tiažového zrýchlenia z výšky nad elipsoidom, takže vzťah (20) môžeme upraviť nasledovne:

$$\delta g(P) = g(P) - (\gamma_0(Q_0) + \delta\gamma_h) , \quad (21)$$

Anomália tiažového zrýchlenia Δg :

Je to rozdiel medzi skutočným tiažovým zrýchlením $g(P)$ a normálnym tiažovým zrýchlením pre nivelovanú výšku $\gamma(Q)$ [m s^{-2}] v bode Q na teluroide:

$$\Delta g = g(P) - \gamma(Q) , \quad (22)$$

Vzťah (22) môžeme upraviť ako:

$$\Delta g = g(P) - (\gamma(Q_0) + \delta\gamma_h) , \quad (23)$$

Poruchový tenzor $T(P)$:

Je to medzi skutočným tiažovým tenzorom $V(P)$ a normálnym tiažovým tenzorom $U(P)$:

$$T(P) = V(P) - U(P) , \quad (24)$$

Úplná Bouguerova anomália tiažového zrýchlenia Δg_{UB} [mGal]:

Je to súčet anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu Δg_{vv} a topografickej redukcia δg_T :

$$\Delta g_{UB} = \Delta g_{vv} + \delta g_T, \quad (25)$$

Zavedieme topografickú redukciu:

$$\Delta g_{UB} = \Delta g_{vv} + \delta g_{SBV} + \delta g_{top}, \quad (26)$$

kde:

δg_{SBV} ... redukcia zo sférickej Bouguerovej vrstvy,

δg_{top} ... topografická korekcia.

Sférická Bouguerova vrstva je geometrický útvar ohraničený geoidom a ekvipotenciálnou plochou prechádzajúcou daným bodom (P) vo sférickej aproximácii. Redukciu zo sférickej Bouguerovej vrstvy určíme podľa vzťahu:

$$\Delta g_{UB} = \Delta g_{vv} + \delta g_{BD} + Bu + \delta g_{top}^{0-1667.7km}, \quad (27)$$

kde:

δg_{BD} ... redukcia z Bouguerovej dosky,

Bu ... Bullardov člen.

Aplikujeme redukciu z Bouguerovej dosky, čo je matematické odstránenie gravitačného účinku z nej:

$$\delta g_{BD} = -2\pi G\rho H \doteq -0.1119 \times H. \quad (28)$$

Samotný Bullardov člen vyjadruje zakrivenia Bouguerovej dosky na tiažové zrýchlenie do vzdialenosti 166,7 km od výpočtového bodu.

Porovnanie využitia anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu a úplnej Bouguerovej anomálie:

Anomália tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu:

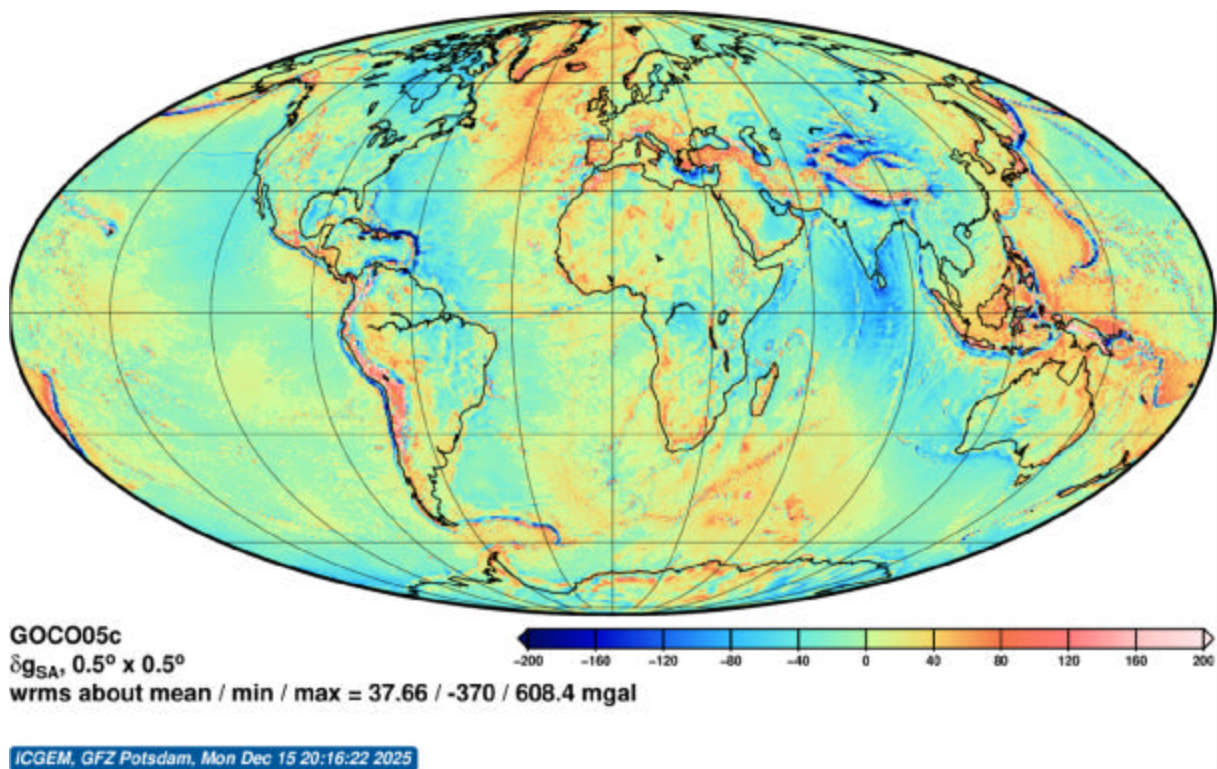
- V geodézii sa používa výpočet geoidu, kvázigeoidu, zvislicových odchýlok,
- Majú členitý priebeh, čiže sú silno lokálne korelované s priebehom terénu,
- Na území Slovenska nadobúdajú prevažne kladné hodnoty.

Úplná Bouguerová anomália:

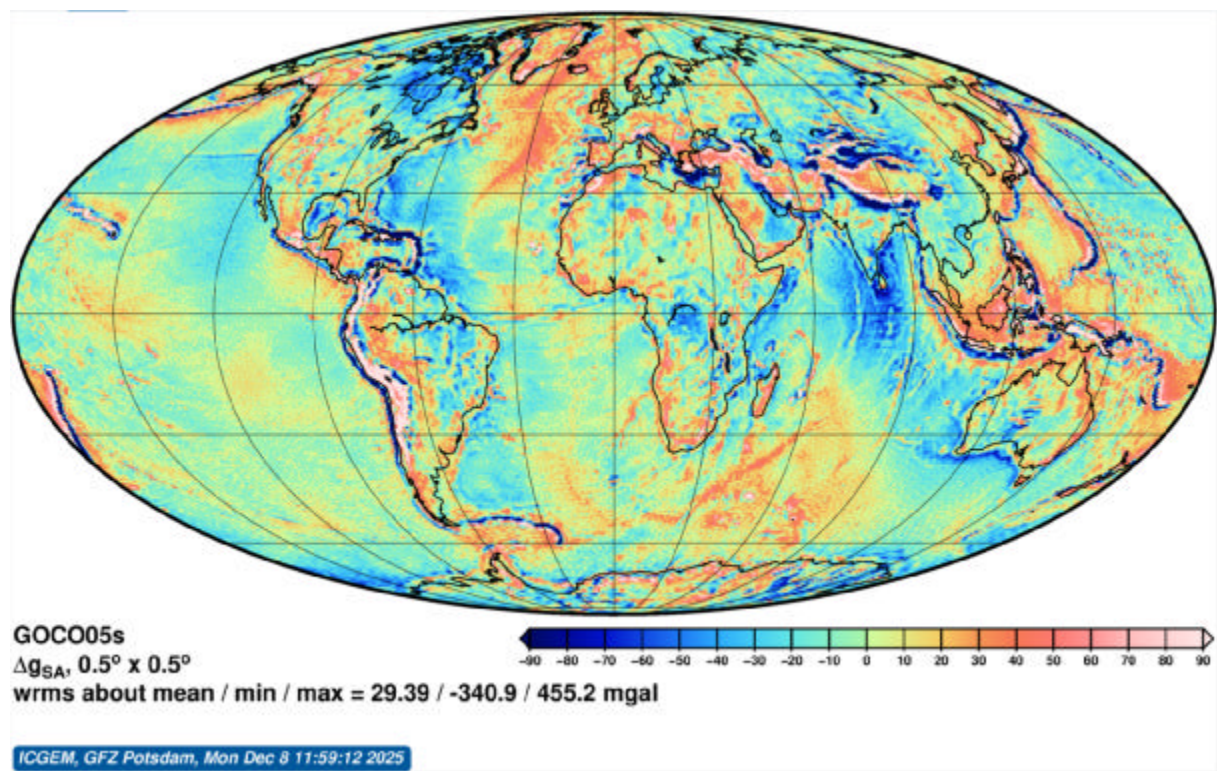
- V geodézii sa používa na interpoláciu anomálií tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu,
- V geofyzike sa zase využíva na detekciu hustotných nehomogenít,
- Majú hlbší priebeh, čiže sú slabo lokálne korelované s priebehom terénu,
- Na území Slovenska nadobúdajú kladné aj záporné hodnoty.

2)

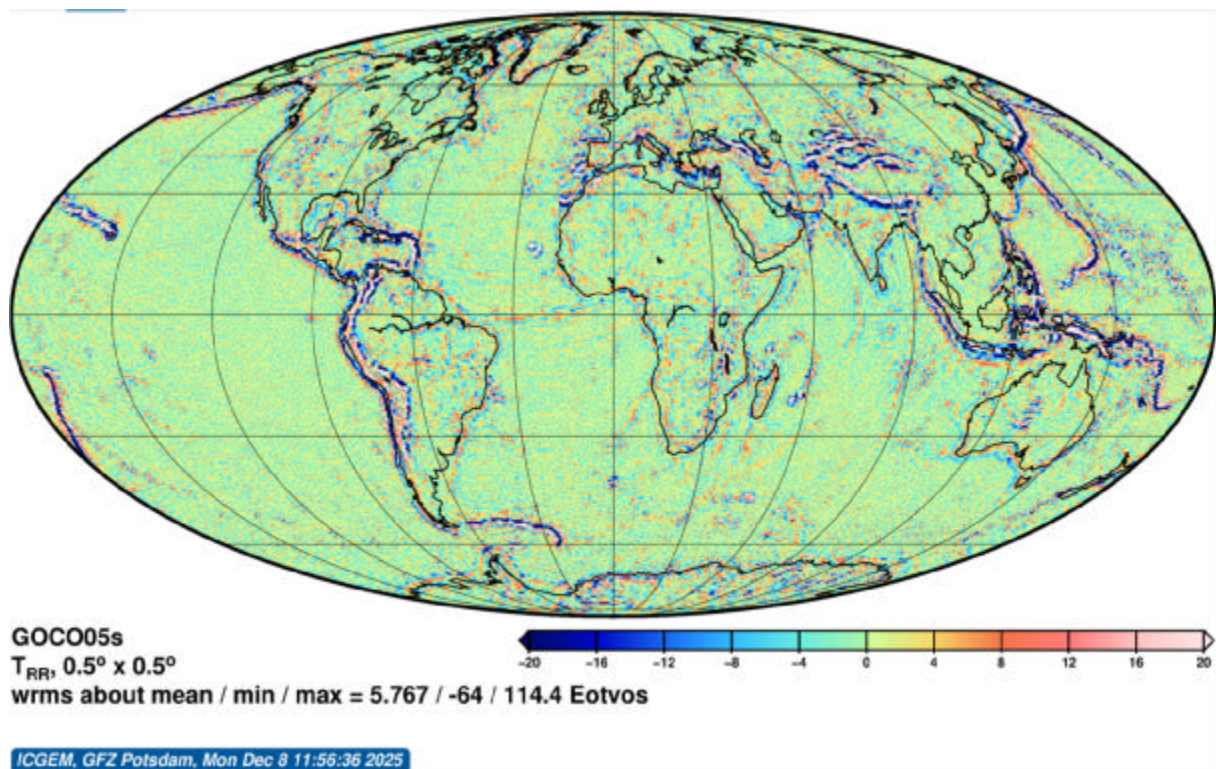
Na stránke: <https://icgem.gfz-potsdam.de/home> sme v sekcii Calculation a Regular grids vybrali referenčný elipsoid GOCO05s. Navolili sme mu rozsah územia, na ktorom sme vykonali výpočet (zemepisná šírka -90° až 90° a zemepisná dĺžka -180° až 180°) grafické výsledky sa tak nachádzajú na obrázkoch (Obr. 5-8). Číselný výsledky 3 ľubovoľných bodov sa nachádzajú zase v tabuľke (Tab. 3).



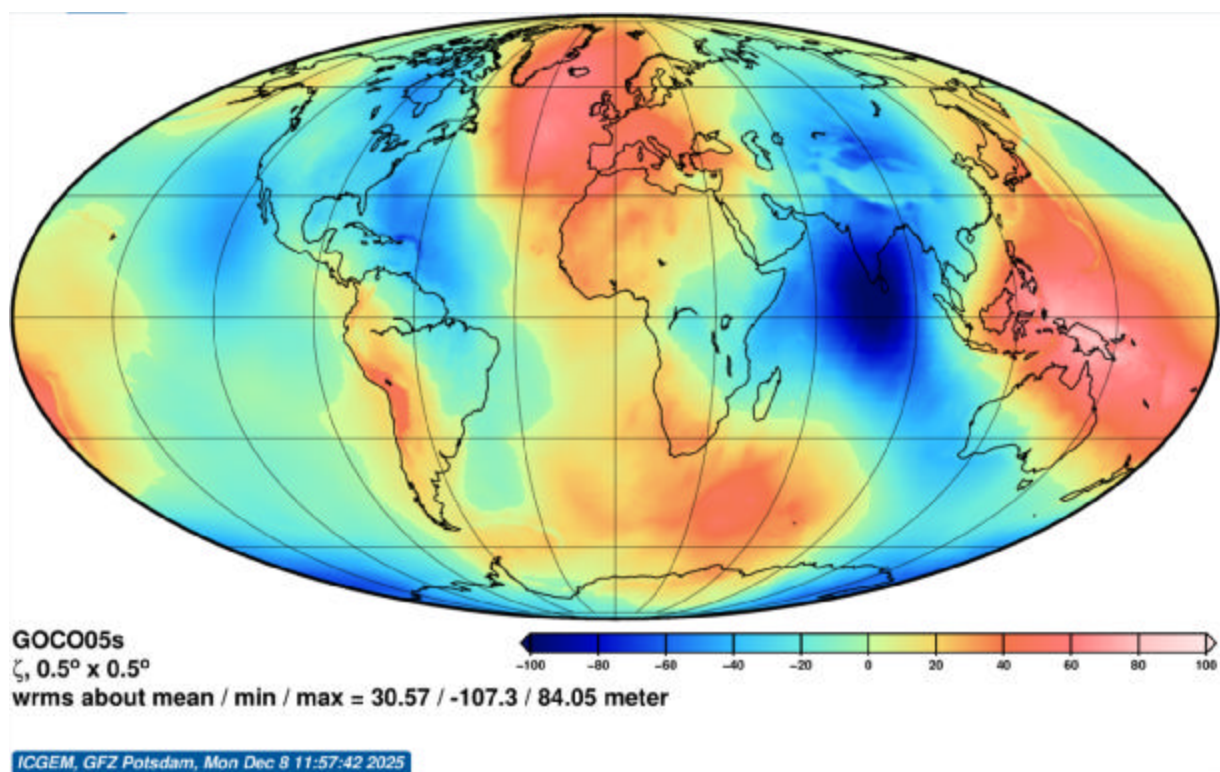
Obr. 5 Zobrazenie tiažového zrýchlenia



Obr. 6 Anomália tiažového zrýchlenia



Obr. 7 Druhá radiálna derivácia poruchového potenciálu



Obr. 8 Výška kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom

Popis obrázkov 5-8:

Obr. 5: Mapa tiažových porúch δg – Mapa vizualizuje rozdiel medzi skutočnou (meranou) tiažou na povrchu Zeme a normálnou (teoretickou) tiažou vypočítanou pre referenčný elipsoid v tom istom bode.

Obr. 6: Mapa tiažových anomálií Δg – Táto mapa znázorňuje rozdiel medzi tiažou na geoide a na elipsoide. Táto veličina v sebe zahŕňa vplyv topografie, preto často koreluje s veľkými horskými celkami.

Obr. 7: Mapa druhej radiálnej derivácie T_{rr} – Mapa slúži na vizualizáciu vertikálneho gradientu tiaže. Vďaka svojej vysokej citlivosti na plytké geologické štruktúry a miestne variácie hustoty má táto derivácia ostrý obraz a efektívne zvýrazňuje tektonické línie.


Obr. 8: Mapa výškových anomálií ζ – Mapa zobrazuje vzdialenosť (odklon) kvázigeoidu od zvoleného referenčného elipsoidu. Charakteristická je svojim hladkým priebehom a je kľúčová pre prevod GPS (elipsoidických) výšok na výšky nadmorské.

Tab. 3 Vypočítané hodnoty pre úlohu č. 2

č.b	lon [°]	lat [°]	δg [mGal]	Δg [mGal]	T_{rr} [E]	ζ [m]
1	-21,50	29,00	9,3572	3,4278	2,6034	30,6332
2	160,50	-6,50	44,5776	41,8042	11,5328	59,0413
3	-118,00	-7,00	-11,4598	-6,3327	-1,5113	-15,0242

Záver:

Cieľom tohto zadania bolo na reálnych dátach demonštrovať, že tiažové pole Zeme nie je homogénne a jeho správna interpretácia závisí od zvoleného typu anomálie. Analýza lokálnych meraní potvrdila, že anomálie vo voľnom vzduchu sú primárne dominantne ovplyvnené morfológiou reliéfu (sú silne korelované s terénom). Tieto anomálie sú preto kľúčové pre presné určenie tvaru Zeme (geoidu). Matematickým zavedením úplnej Bouguerovej korekcie bol efekt topografie eliminovaný. Týmto spracovaním boli odhalené skryté hustotné nehomogenity v podloží, ktoré predstavujú zložku tiažového poľa neviditeľnú bežnými meraniami. Využitie globálneho modelu tiažového poľa (GOCO05s) umožnilo integráciu lokálnych zistení do širšieho, celosvetového kontextu. Toto nám pomohlo pochopiť a identifikovať dlhovlnné trendy a zložky tiažového poľa, ktoré ovplyvňujú Zem na planetárnej škále.



Michal Ladislav