

VYHOTOVIL Tadeáš PONIŠŤ, 3. GAK / 1. Krúž.	KONTROLOVAL doc. Ing. Blažej BUCHA, PhD.	KATEDRA GLOBÁLNEJ GEODÉZIE A GEOINFORMATIKY STAVEBNÁ FAKULTA STU RADLINSKÉHO 11 810 05 BRATISLAVA	
NÁZOV:  <b>Zadanie č. 5 – Anomálne tiažové pole Zeme,          určovanie geoidu a zvislicových odchýlok</b>		FORMÁT	A4
		POČET STRÁN	11
		POČET PRÍLOH	0
		ZADANÉ	18. 11. 2025
		ODOVZDANÉ	10. 12. 2025
<b>FYZIKÁLNA GEODÉZIA 1</b>		HODNOTENIE	KONTROLOVAL

**Slovenská technická univerzita v Bratislave**  
**Stavebná fakulta**  
Katedra globálnej geodézie a geoinformatiky

---

Študijný program: **GEODÉZIA A KARTOGRAFIA**

Predmet: **FYZIKÁLNA GEODÉZIA**

Ročník: 3

Ak. rok: 2025/2026

Meno študenta: ..... **Tadeáš Poništ** .....

Číslo zadania: ..... **24(4)** .....

**Zadanie č. 5 – Anomálne tiažové pole Zeme, určovanie geoidu  
a zvislicových odchýlok**

1. Vypočítajte anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu a úplné Bouguerove anomálie tiažového zrýchlenia v danej lokalite. Vypočítané anomálie graficky znázorníte a porovnáte ich s priebehom terénu.
2. Vypočítajte poruchu tiažového zrýchlenia  $\delta g$ , anomáliu tiažového zrýchlenia  $\Delta g$ , druhú radiálnu deriváciu poruchového potenciálu  $T_{rr}$  a výšku kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom  $\zeta$  v celosvetovom gride s použitím globálneho geopotenciálneho modelu Zeme.

**Obsah zadania:**

- Text zadania (tento list)

**Úloha 1:**

- Ukážka vstupného súboru a mapa polohy meraných bodov
- Tabuľka vypočítaných hodnôt (normálne tiažové zrýchlenie na povrchu elipsoidu GRS-80, zmena normálneho tiažového zrýchlenia s výškou, anomália tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu, redukcia z Bouguerovej dosky, úplná Bouguerova anomália)
- Mapa nadmorských výšok, mapa anomálií tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu, mapa úplných Bouguerových anomálií
- Technická správa (definície, matematické vzťahy, slovný komentár k výsledkom a k využitiu jednotlivých typov anomálií tiažového zrýchlenia v geodézii)

**Úloha 2:**

- Výsledné hodnoty v 3 ľubovoľne zvolených bodoch gridu
- Grafické znázornenie výsledkov
- Technická správa s definíciami, obrázkami, použitými matematickými vzťahmi a postupom výpočtu

**Termín odovzdania zadania:** 9. 12. 2025

**Zadal:** Blažej Bucha

# Technická správa

## Cieľom elaborátu bolo:

1. Určiť anomálie tiažového zrýchlenia (voľný vzduch, Bouguer) a porovnať ich s terénom.
2. Vypočítať poruchu tiaže, anomáliu  $\Delta g$ , radiálnu deriváciu potenciálu a kvázigeoid  $\zeta$  z globálneho geopotenciálneho modelu.

Teda ide o analýzu gravitačného poľa a jeho vzťahu k terénu.

Poruchové (anomálne) tiažové pole opisuje rozdiel medzi skutočným gravitačným poľom Zeme a ideálnym normálnym poľom definovaným referenčným elipsoidom. Tento rozdiel vzniká v dôsledku nerovnomerného rozloženia hmôt v Zemi (hory, panvy, hustotné anomálie v kôre a mante).

Veličiny poruchového poľa:

- Poruchový potenciál  $T$  – potenciálová funkcia vyjadrujúca rozdiel medzi skutočným a normálnym potenciálom. Je základom pre odvodenie všetkých ostatných anomálií.
- Porucha tiažového zrýchlenia  $\delta g$  – rozdiel v tiažovom zrýchlení medzi skutočným poľom a normálnym poľom v tom istom bode. Udáva, o koľko je gravitačné zrýchlenie iné než teoretická hodnota na elipsoide.
- Anomália tiažového zrýchlenia  $\Delta g$  – rozdiel medzi skutočnou tiažou v teréne a normálnou tiažou vzťahovanou na hladinu geoidu. Zohľadňuje aj výškový rozdiel a redukcie. Používa sa pri geofyzikálnej interpretácii.
- Poruchový tenzor  $T$  (tenzor tiažových gradientov) – matica druhých derivácií poruchového potenciálu. Vyjadruje lokálne zmeny gravitačného poľa v priestore a poskytuje informácie o geologických štruktúrach a hustotných kontrastoch.

# Úloha 1

Tab. 1 Vstupné hodnoty k zadaniu (prvých 10 bodov)

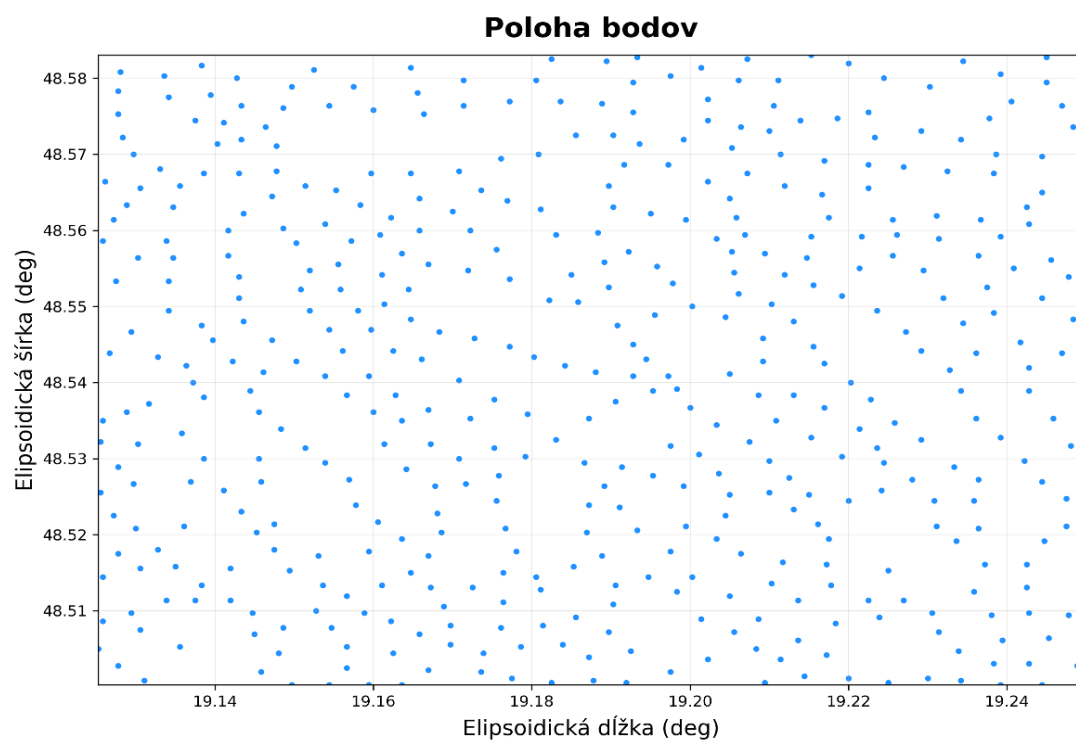
Č.b.	Elipsoidická šírka $\varphi$ [°]	Elipsoidická dĺžka $\lambda$ [°]	Elipsoidická výška $h$ [m]	Nadmorská výška $H$ [m]	Tiažové zrýchlenie $g$ [mGal]	Topografická redukcia $\delta g_{TOP}$ [mGal]
10	48,58083	19,12806	335,961	292,06	980864,5	0,41
20	48,57833	19,12778	336,302	292,4	980863,6	0,42
30	48,57528	19,12778	334,995	291,09	980863,1	0,46
40	48,57222	19,12833	336,767	292,86	980862,1	0,54
50	48,57	19,12972	331,339	287,43	980863	0,58
60	48,56805	19,13305	328,012	284,1	980862,8	0,58
70	48,5675	19,13861	331,013	287,1	980862,3	0,58
80	48,57139	19,14028	333,68	289,77	980863,4	0,57
90	48,57444	19,1375	331,626	287,72	980864,8	0,47
100	48,5775	19,13417	336,564	292,66	980864,6	0,48

## Referenčný elipsoid GRS-80

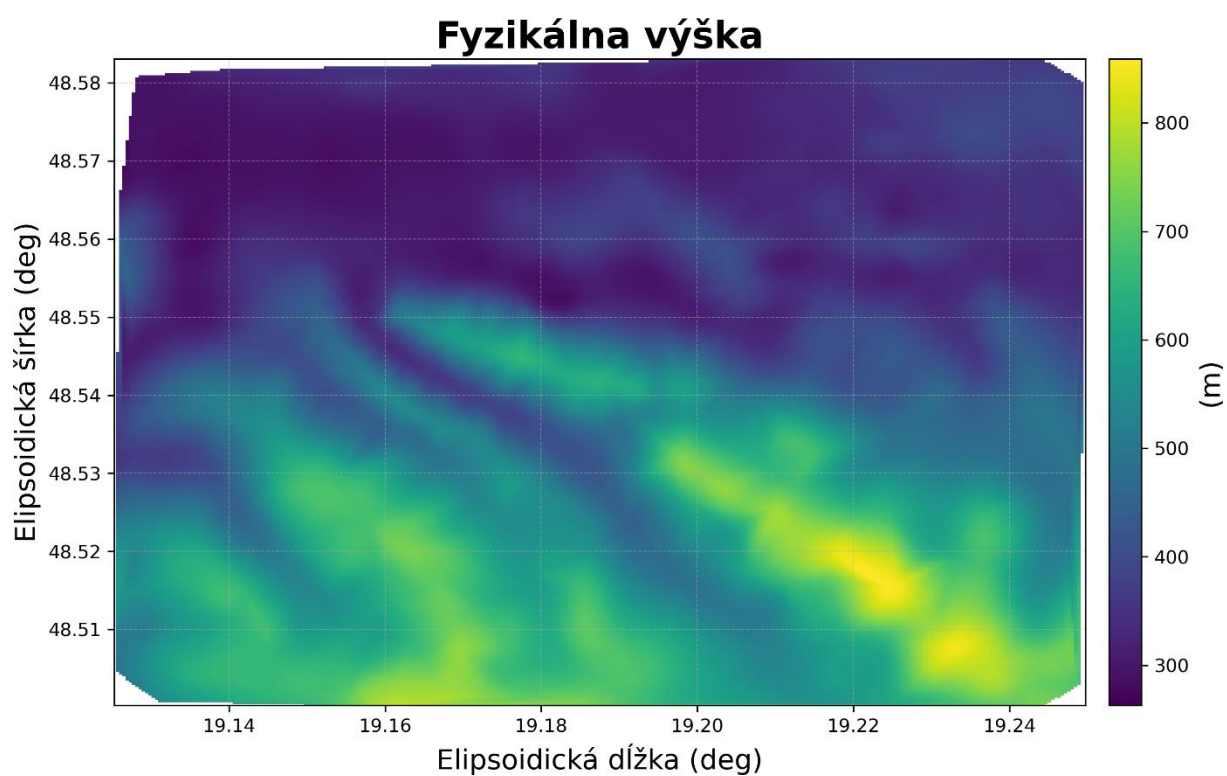
Tab. 2 Základné parametre ekvipotenciálneho elipsoidu (GRS-80):

$a$	6 378 137 m
$GM$	$3\,986\,005 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
$J_{2,0}$	$108\,263 \times 10^{-8}$
$\omega$	$7\,292\,115 \times 10^{-11} \text{ rad s}^{-1}$

$a$  – dĺžka hlavnej polosi elipsoidu  
 $GM$  – geocentrická gravitačná konštanta  
 $J_{2,0}$  – sférický harmonický koeficient  
 $\omega$  – uhlová rýchlosť rotácie Zeme



*Obr. 1 Mapa polohy bodov*



*Obr. 2 Mapa fyzikálnych výšok*

Prvá numerická excentricita:

$$e^2 \approx 3J_{2,0} + q - \frac{9}{14}q^2 - \frac{27}{14}J_{2,0}q + \frac{149}{392}q^3 + \frac{51}{49}J_{2,0}q^2 - \frac{117}{392}J_{2,0}^2q \quad (1)$$

$$q = \frac{\omega^2 a^3}{GM} \quad (2)$$

Kde:

$q$  - bezrozmerný rotačný parameter určujúci mieru pôsobenia odstredivých síl Zeme

Dĺžka vedľajšej polosi:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (3)$$

Lineárna excentricita:

$$E = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (4)$$

Druhá numerická excentricita:

$$(e')^2 = \frac{E^2}{b^2} \quad (5)$$

Sploštenie:

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (6)$$

Normálne tiažové zrýchlenie na rovníku:

$$\gamma_e = \frac{GM}{ab} \left( 1 - m - \frac{m}{6} \frac{e'q'}{q} \right) \quad (7)$$

Normálne tiažové zrýchlenie na pólach:

$$\gamma_p = \frac{GM}{a^2} \left( 1 + \frac{m}{3} \frac{e'q'}{q} \right) \quad (8)$$

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \quad (9)$$

$$\frac{e'q'}{q} = \frac{21 - 9(e')^2 + 5(e')^4}{7 - 6(e')^2 + 5(e')^4} \quad (10)$$

Kde:

$\gamma_e$  – normálne tiažové zrýchlenie na rovníku

$\gamma_p$  – normálne tiažové zrýchlenie na pólach

$m$  – dynamický tvarový faktor

$q$  – Moritzov integrál  $q$  pre normálny sféroid

Normálové tiažové zrýchlenie v bode na povrchu elipsoidu:

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_e \cos^2(\varphi) + b\gamma_p \sin^2(\varphi)}{\sqrt{a^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi)}} = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2(\varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi)}} \quad (11)$$

$$k = \frac{b\gamma_p}{a\gamma_e} - 1 \quad (12)$$

Kde:

$\gamma_0$  – normálne tiažové zrýchlenie v bode na povrchu elipsoidu

$k$  – Somiglianov parameter tiažového poľa

Zmena normálneho tiažového zrýchlenia s elipsoidickou výškou:

$$\delta\gamma_h = -\frac{2\gamma_0}{a}(1 + f + m - 2f \sin^2(\varphi))h + \frac{3\gamma_0}{a}h^2 \quad (13)$$

Kde:

$\delta\gamma_h$  – zmena normálneho tiažového zrýchlenia s elipsoidickou výškou

$h$  – výška bodu nad elipsoidom

Normálne tiažové zrýchlenie pre elipsoidickú výšku:

$$\gamma_h = \gamma_0 + \delta\gamma_h \quad (14)$$

Výpočet zmeny normálneho tiažového zrýchlenia pre nadmorskú výšku :

$$\delta\gamma_H = \frac{-2 \cdot \gamma_0}{a}(1 + f + m - 2 \cdot f \cdot \sin^2 \varphi) \cdot H + \frac{3 \cdot \gamma_0}{a^2} \cdot H^2 \quad (15)$$

Výpočet normálneho tiažového zrýchlenia pre nadmorskú výšku :

$$\gamma_H = \gamma_0 + \delta\gamma_H \quad (16)$$

## **Veličiny poruchového poľa:**

Poruchový potenciál  $T$ :

$$T = W(P) - U(P) \quad (17)$$

Porucha tiažového zrýchlenia  $\delta g(P)$ :

$$\delta g(P) = g(P) - \gamma_h(P) \quad (18)$$

Kde:

$g(P)$  – skutočné tiažové zrýchlenie

$\gamma_h(P)$  – normálne tiažové zrýchlenie s elipsoidickou výškou  $h$

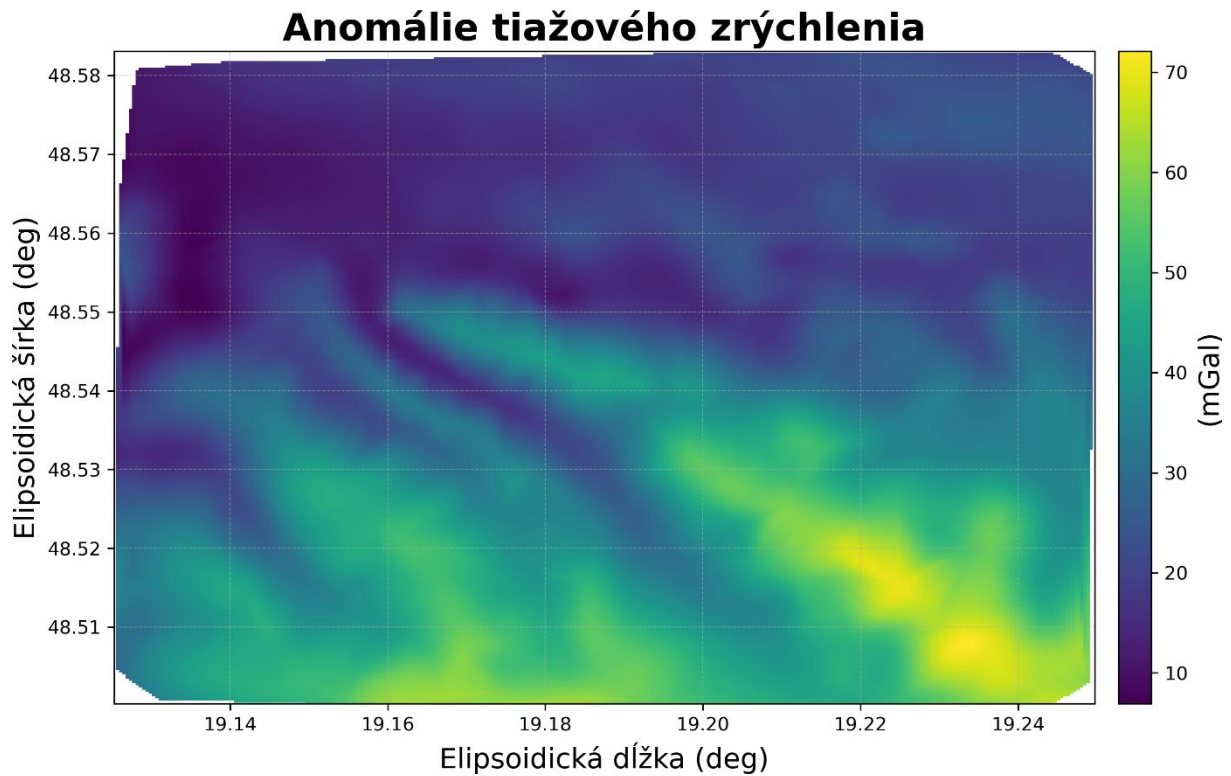
Anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu

$$\Delta g = g(P) - \gamma_H(Q) \quad (19)$$

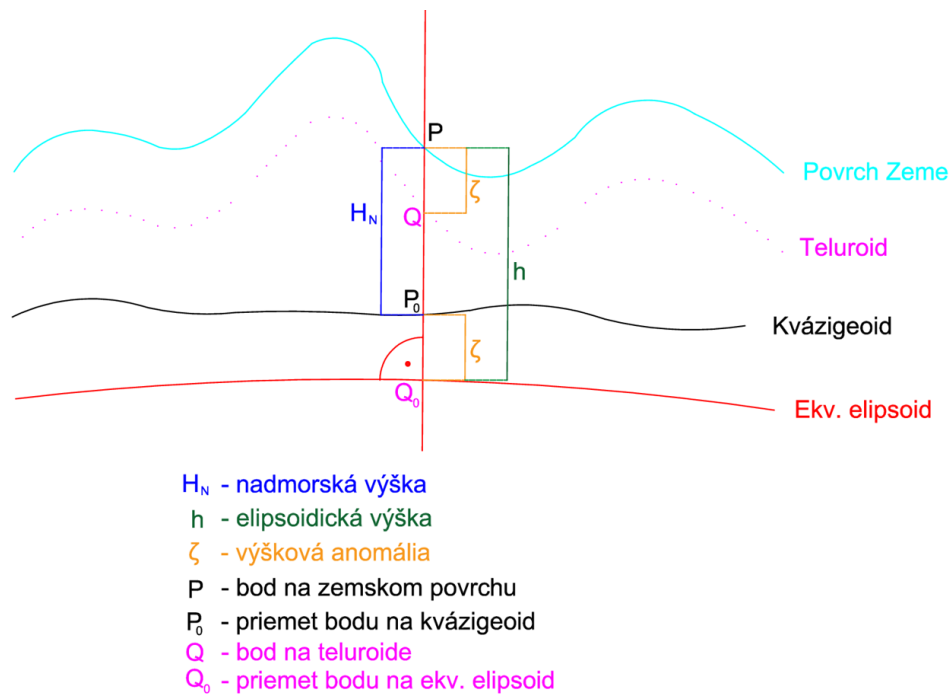
Kde:

$\gamma_H(P)$  – normálne tiažové zrýchlenie s elipsoidickou výškou  $h$

$\Delta g$  – anomália tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu



Obr. 3 Mapa anomálii tiažového zrýchlenia



Obr. 4 Znáznornenie výškovej anomálie a výšok



Výpočet úplných Bouguerových anomálií  $\Delta g_{UB}$ :

$$\Delta g_{UB} = \Delta g_{vv} + \delta g_{TOP} = \Delta g_{UB} = \Delta g + \delta g_{BD} + Bu + \delta g_{TOP} \quad (20)$$

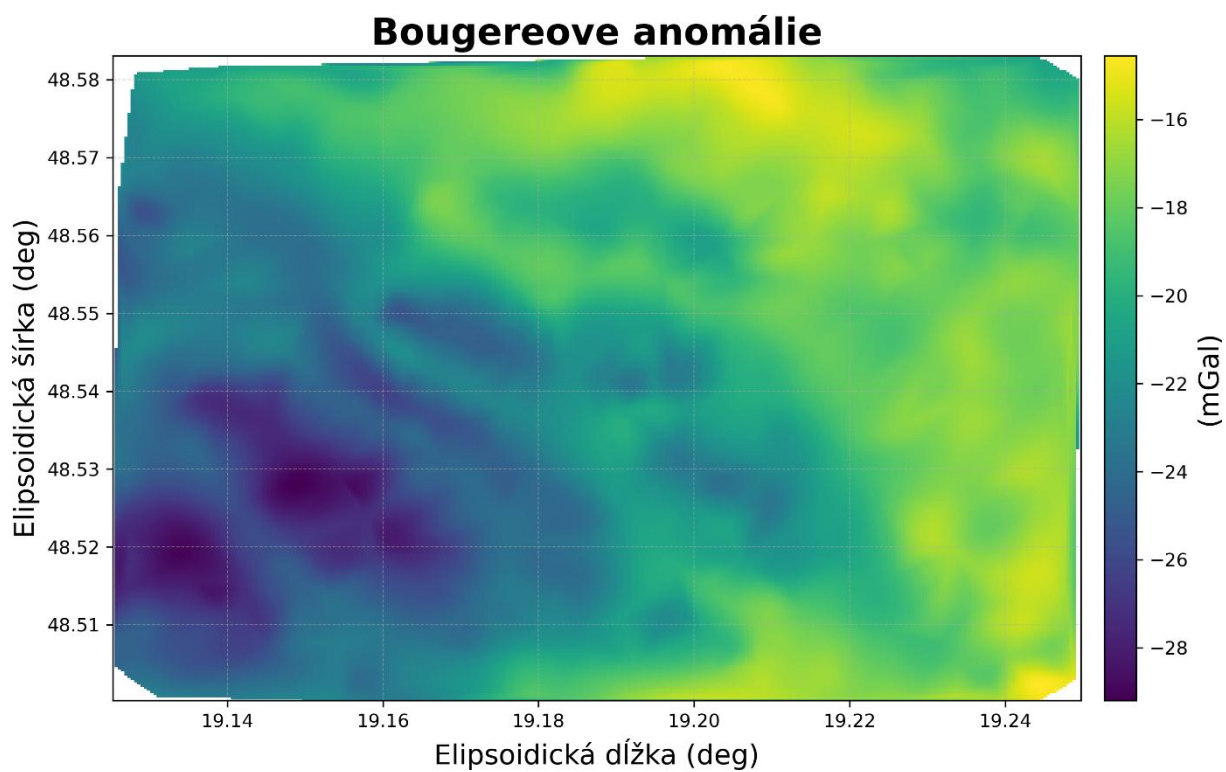
Kde:

$\delta g_{TOP}$  – topografická redukcia

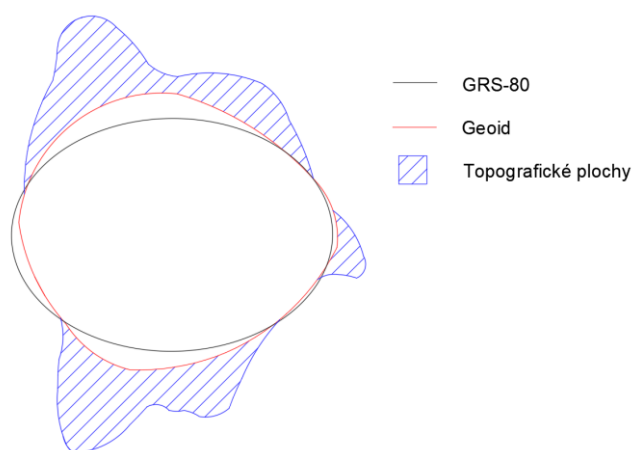
$\Delta g_{UB}$  – úplná Bouguerova anomália

$\delta g_{BD}$  – redukcia z Bougerovej dosky

$Bu$  – Bullardov člen



*Obr. 5 Mapa úplných Bougereových anomálii*



*Obr. 6 Znážornenie úplnej Bougereovej anomálie*

Topografická korekcia je matematické odstránenie gravitačného účinku časti topografických hmôt nachádzajúcich sa nad ekvipotenciálnou plochou prechádzajúcou výpočtovým bodom a kompenzácia nedostatku topografických hmôt vo sférickej Bouguerovej vrstve na tiažové zrýchlenie.

Bouguerova doska je geometrický útvar ohraničený geoidom a ekvipotenciálnou plochou prechádzajúcou výpočtovým bodom v rovinnej aproximácii (geoid a ekvipotenciálna plocha sú nahradené rovinami a ich vzájomná odľahlosť je  $H$ ). Uvažujeme, že je plná hmôt s konštantnou hustotou. Redukcia z Bouguerovej dosky je teda matematické odstránenie gravitačného účinku Bouguerovej dosky.

Bullardov člen je účinok zakrivenia Bouguerovej dosky na tiažové zrýchlenie do vzdialenosti 166.7 km.

## Výsledky:

Tab. 3 Výsledky 1. úlohy

Č.b.	$\gamma_0$ [mGal]	$\gamma_h$ [mGal]	$\gamma_H$ [mGal]	$\Delta g$ [mGal]	$\Delta g_{UB}$ [mGal]
10	980943,272	980839,627	980853,170	11,336	-21,342
20	980943,048	980839,297	980852,840	10,756	-21,951
30	980942,774	980839,426	980852,970	10,080	-22,438
40	980942,499	980838,605	980852,149	9,927	-22,712
50	980942,299	980840,080	980853,625	9,409	-22,575
60	980942,124	980840,931	980854,477	8,354	-23,253
70	980942,075	980839,956	980853,502	8,809	-23,138
80	980942,424	980839,483	980853,028	10,419	-21,839
90	980942,698	980840,390	980853,934	10,875	-21,252
100	980942,973	980839,142	980852,686	11,909	-20,767

## Využitie anomálií tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu

Používajú sa najmä v geodézii pri výpočte geoidu, kvázigeoidu či zvislicových odchýlok. Majú **členitý a veľmi lokálny priebeh**, pretože výrazne reagujú na tvar terénu a výškové rozdiely.

Na území SR sú väčšinou kladné, výnimočne záporné (napr. Záhorie); celosvetovo sa vyskytujú obe znamienka.

## Využitie úplných Bouguerových anomálií

Slúžia najmä v geofyzike na identifikáciu hustotných rozdielov v kôre a podzemných štruktúr. Majú vyhladený priebeh, keďže sú zbavené terénneho účinku a lepšie odrážajú skutočné hustotné anomálie v podloží.

Na Slovensku aj vo svete sa objavujú kladné aj záporné hodnoty v závislosti od geologických pomerov

## Úloha 2

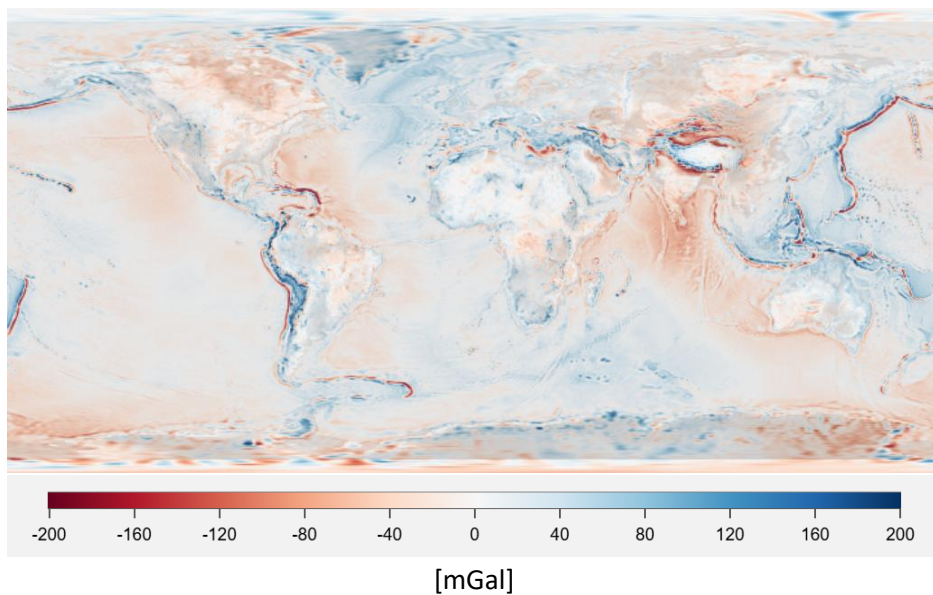
Výpočty boli realizované cez portál:

<https://icgem.gfz-potsdam.de/>

Vstupné parametre:

- globálny geopotenciálny model: EGM96
- Referenčný elipsoid: GRS-80
- Typ stupných súradníc: elipsoidické
- zemepisná dĺžka  $\lambda$  (-180°, 180°)
- zemepisná šírka  $\varphi$  (-90° po 90°)
- krok gridu 0.5° s použitím maximálneho stupňa globálneho geopotenciálneho modelu.
- Výška nad referenčným povrchom: 0 m
- Počet vypočítaných bodov v gride: 260 281

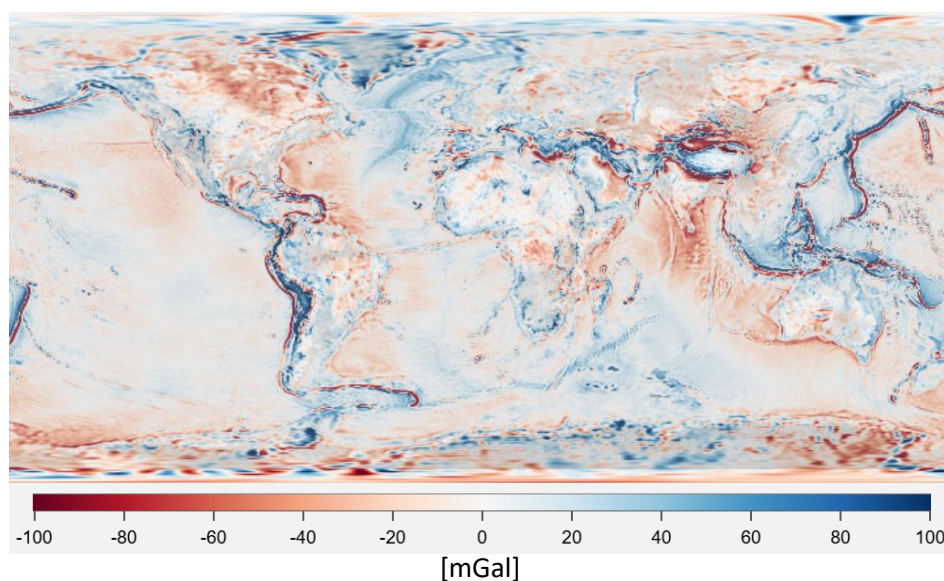
**Porucha tiažového zrýchlenia  $\delta g$ :**



*Obr. 7 Mapa poruchy tiažového zrýchlenia v celosvetovom gride s použitím globálneho geopotenciálneho modelu Zeme*

Mapa zobrazuje globálne rozloženie poruchy tiažového zrýchlenia  $\delta g$ , teda odchýlky skutočnej tiaže od teoretickej hodnoty. Kladné aj záporné hodnoty sa viažu najmä na veľké geologické útvary, ako sú pohoria alebo miesta, kde sa zemské platne podsúvajú. Tieto rozdiely odrážajú zmeny v hustote a zložení podložia.

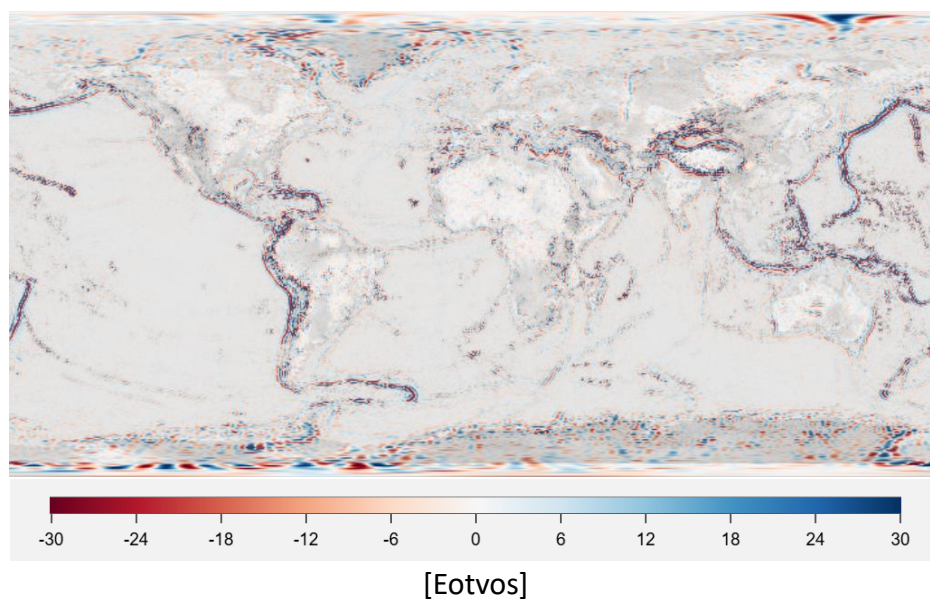
### Anomálie tiažového zrýchlenia $\Delta g$ :



*Obr. 8 Mapa anomálie tiažového zrýchlenia v celosvetovom gride s použitím globálneho geopotenciálneho modelu Zeme*

Mapa zobrazuje priestorové rozloženie anomálií tiažového zrýchlenia  $\Delta g$ , ktoré predstavujú odchýlky skutočnej tiaže od teoretickej hodnoty na elipsoide. Väčšie kladné aj záporné anomálie sa vyskytujú najmä pri veľkých geologických štruktúrach, ako sú pohoria alebo okrajové zóny litosférických platní. Tieto oblasti naznačujú rozdiely v zložení a hustote podložia.

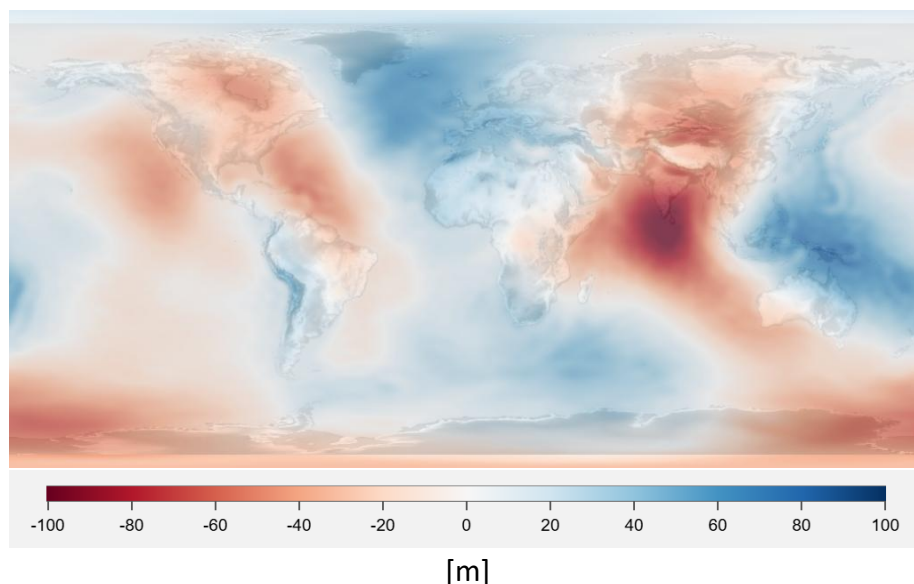
### Druhá radiálna derivácia poruchového potenciálu $T_{rr}$ :



*Obr. 9 Mapa druhej radiálnej deriváciu poruchového potenciálu v celosvetovom gride s použitím globálneho geopotenciálneho modelu Zeme*

Mapa zobrazuje druhú radiálnu deriváciu poruchového potenciálu  $T_{rr}$ , ktorá vyjadruje zmeny tiažového poľa v smere kolmom na povrch Zeme. Najvýraznejšie hodnoty sa vyskytujú v oblastiach tektonicky aktívnych zón, kde sú veľké kontrasty hustoty.

#### Výška kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom $\zeta$ :



Obr. 10 Mapa výšky kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom v celosvetovom gride s použitím globálneho geopotenciálneho modelu Zeme

Mapa zobrazuje rozdiel medzi referenčným elipsoidom a kvázigeoidom. Kladné aj záporné hodnoty odrážajú veľké rozdiely v tvare Zeme spôsobené pohoriami, panvami...

#### Výsledky:

Tab. 4 Výsledky 2. úlohy pre 3 zvolené body gridu

Č. b.	$\varphi$ [°]	$\lambda$ [°]	$\delta g$ [mGal]	$\Delta g$ [mGal]	$T_{rr}$ [Eotvos]	$\zeta$ [m]
1	83	-10	-13,891	-22,300	-14,161	28,972
2	83	-9,5	-7,124	-15,585	-10,947	28,986
3	83	-9	0,466	-8,052	-7,420	29,000

Miesto vyhotovenia elaborátu: Bratislava

Dátum: 9. 12. 2025

Tadeáš Poništ

*Poništ*