

**Slovenská technická univerzita v Bratislave**  
**Stavebná fakulta**  
Katedra globálnej geodézie a geoinformatiky

---

Študijný program: **GEODÉZIA A KARTOGRAFIA**

Predmet: **FYZIKÁLNA GEODÉZIA**

Ročník: 3

Ak. rok: 2025/2026

Meno študenta: Alexandra Verešová.....

Číslo zadania: 31.....

**Zadanie č. 5 – Anomálne tiažové pole Zeme, určovanie geoidu  
a zvislicových odchýlok**

1. Vypočítajte anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu a úplné Bouguerove anomálie tiažového zrýchlenia v danej lokalite. Vypočítané anomálie graficky znázorníte a porovnájte ich s priebehom terénu.
2. Vypočítajte poruchu tiažového zrýchlenia  $\delta g$ , anomáliu tiažového zrýchlenia  $\Delta g$ , druhú radiálnu deriváciu poruchového potenciálu  $T_{rr}$  a výšku kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom  $\zeta$  v celosvetovom gride s použitím globálneho geopotenciálneho modelu Zeme.

**Obsah zadania:**

- Text zadania (tento list)

**Úloha 1:**

- Ukážka vstupného súboru a mapa polohy meraných bodov
- Tabuľka vypočítaných hodnôt (normálne tiažové zrýchlenie na povrchu elipsoidu GRS-80, zmena normálneho tiažového zrýchlenia s výškou, anomália tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu, redukcia z Bouguerovej dosky, úplná Bouguerova anomália)
- Mapa nadmorských výšok, mapa anomálií tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu, mapa úplných Bouguerových anomálií
- Technická správa (definície, matematické vzťahy, slovný komentár k výsledkom a k využitiu jednotlivých typov anomálií tiažového zrýchlenia v geodézii)

**Úloha 2:**

- Výsledné hodnoty v 3 ľubovoľne zvolených bodoch gridu
- Grafické znázornenie výsledkov
- Technická správa s definíciami, obrázkami, použitými matematickými vzťahmi a postupom výpočtu

**Termín odovzdania zadania:** 9. 12. 2025

**Zadal:** Blažej Bucha

## Technická správa

### 1. Predmet / obsah zadania :

#### Úloha č.1:

Cieľom prvej časti zadania č. 5 bolo realizovať gravimetrické vyhodnotenie záujmového územia prostredníctvom určenia anomálií tiažového poľa. Konkrétne sme pristupovali k stanoveniu anomálií tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu, ako aj k výpočtu úplných Bouguerových anomálií. Komplexný prehľad o priebehu týchto vypočítaných parametrov poskytujú grafické výstupy, ktoré sme zaradili ako obrázky 1 až 5.

#### Úloha č.2:

Predmetom úlohy č. 2 bolo určenie súboru tiažových a geometrických parametrov v globálnom meradle. Našou úlohou bolo pre celosvetové mriežkové pole vypočítať hodnoty poruchy tiažového zrýchlenia  $\delta g$  a anomálie tiažového zrýchlenia  $\Delta g$ . Súčasťou výpočtov realizovaných na podklade globálneho geopotenciálneho modelu Zeme bolo taktiež stanovenie druhej radiálnej derivácie poruchového potenciálu  $T_{rr}$  a výšky kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom  $\zeta$ .

### 2. Postup spracovania úloh:

#### Úloha č.1:

*Tabuľka 1 - Ukážka vstupných údajov (prvé 3 hodnoty)*

Č.b.	$\varphi$ [°]	$\lambda$ [°]	$h$ [m]	$H$ [m]	$g$ [mGal]	$\Delta g_{top}$ [mGal]
10	48,58306	19,37583	479,99	435,93	980842,2	0,92
20	48,57972	19,37694	504,484	460,42	980837,7	1,1
30	48,57695	19,37833	525,008	480,94	980832,8	1,22

kde:

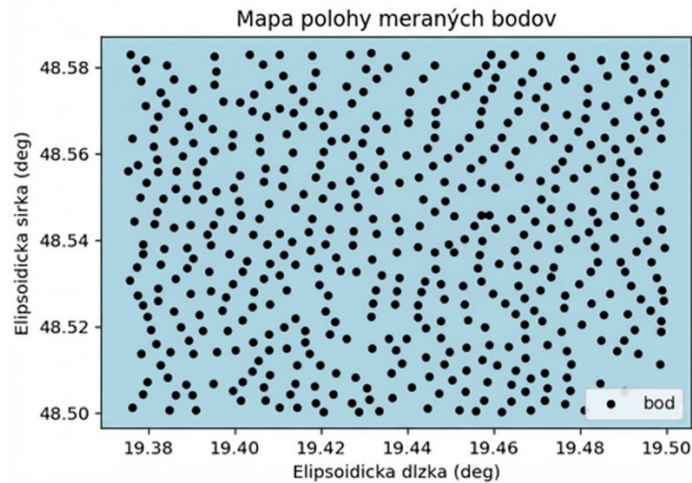
$\varphi$  je zemepisná šírka,

$\lambda$  je zemepisná dĺžka,

$h$  predstavuje elipsoidickú výška,

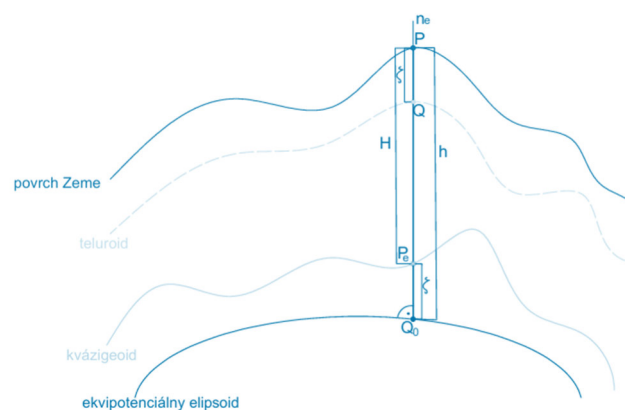
$H$  je výška určená pomocou nivelácie (nadmorská výška),

$g$  je hodnota tiažového zrýchlenia,  
 $\Delta g_{top}$  je hodnota topografickej redukcie.



Obrázok 1 - Mapa polohy meraných bodov

Obrázok 1 dokumentuje situáciu merania, kde sme na základe importovaných súradníc v prostredí Spyder vykreslili polohu všetkých bodov siete. V ďalšom kroku analýzy (obrázok 2) sme graficky konfrontovali hodnoty elipsoidických výšok s nadmorskými výškami získanými niveláciou. Táto vizualizácia nám umožňuje priamo pozorovať vzťah medzi týmito výškovými systémami a identifikovať geometrickú separáciu medzi referenčným elipsoidom a nivelačnou vzťažnou plochou.



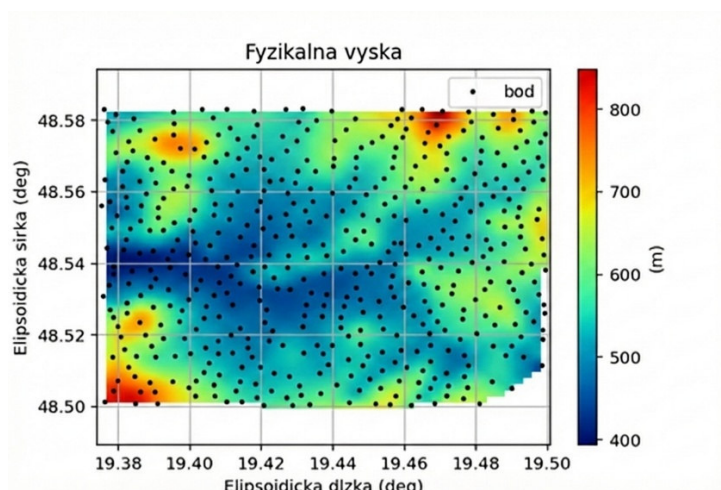
Obrázok 2 - Znázornenie elipsoidických a nadmorských výšok

kde:

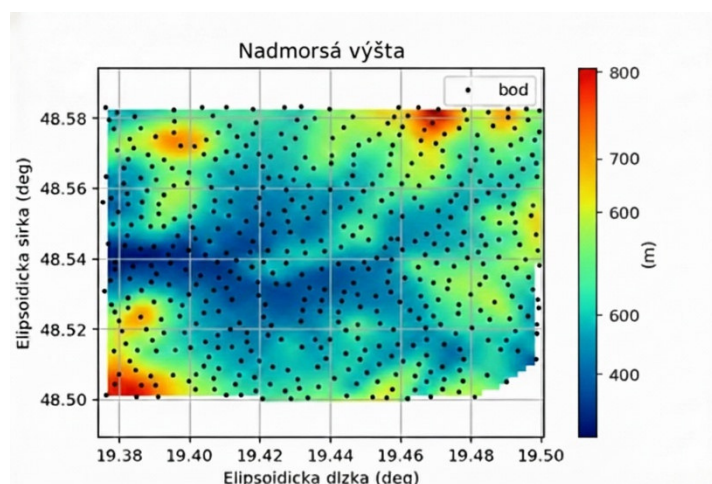
$h$  je elipsoidická výška,  
 $H$  je výška určená pomocou nivelácie (nadmorská výška),

$\zeta$  je výška kvázigeoidu nad elipsoidom,  
 $n_e$  je normála k referenčnému elipsoidu.

V ďalšom kroku sme v programe Spyder spracovali aj namerané výšky. Tie sme do grafov vyniesli spoločne s polohou jednotlivých bodov tak, aby bolo jasné, kde sa ktorá hodnota v priestore nachádza. Výsledok tohto zobrazenia, ktorý spája polohu s výškou, sme následne znázornili na obrázkoch 3 a 4.



Obrázok 3 - grafické znázornenie fyzikálnych výšok



Obrázok 4 - grafické znázornenie nadmorskej výšky

Pre potreby matematickej aproximácie zemského telesa sme ako referenčnú plochu použili ekvipotenciálny elipsoid GRS-80. Tento model je definovaný súborom presných číselných konštánt, pričom všetky jeho základné parametre sú uvedené v tabuľke č.2.

Tabuľka 2 – Základné parametre ekvipotenciálneho elipsoidu (GRS80)

OZNAČENIE	POPIS	HODNOTA	JEDNOTKA
$a$	Dĺžka hlavnej polosi	6 378 137	m
$J_{2,0}$	Dynamický faktor	$108\,263 \times 10^{-8}$	Bezrozmerné
$GM$	Geocentrická gravitačná konštanta	$3\,986\,005 \times 10^8$	$\text{m}^3 \text{s}^{-2}$
$\omega$	Uhlová rýchlosť rotácie	$7\,292\,115 \times 10^{-11}$	$\text{rad s}^{-1}$

V prvej fáze spracovania bolo potrebné určiť odvodené parametre ekvipotenciálneho elipsoidu, ktoré sme nemali priamo zadané. Celý postup výpočtov sme preto začali stanovením prvej numerickej excentricity:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (1)$$

$$e^2 \approx 3J_{2,0} + q - \frac{9}{14}q^2 - \frac{27}{14}J_{2,0}q + \frac{149}{392}q^3 + \frac{51}{49}J_{2,0}q^2 - \frac{117}{392}J_{2,0}^2q \quad (2)$$

$$q = \frac{\omega^2 a^3}{GM} \quad (3)$$

kde:

$q$  predstavuje pomocný parameter.

Dĺžku vedľajšej polosi  $b[m]$  sme vypočítali ako:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (4)$$

Lineárnu excentricitu  $E [m]$  sme vypočítali podľa vzťahu:

$$E = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (5)$$

2. numerická excentricita  $e'$  (bezrozmerná veličina):

$$e'^2 = \frac{E^2}{b^2} \quad (6)$$

Sploštenie  $f$  sme počítali:

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (7)$$

Tabuľka 2 - Odvodnené parametre kvipotenciálu elipsoidu

Parametre	Vypočítané hodnoty
$q$	0,003
$e^2$	0,007
$b$	6356752,314 m
$E$	521854,012 m
$e'^2$	0,007
$f$	0,003

Ešte pred samotným výpočtom normálneho tiažového zrýchlenia nás čakal jeden medzikrok, a to prevod súradnicového systému. Pôvodné elipsoidické súradnice sme museli transformovať na sférické. Na tento účel sme aplikovali matematické vzťahy, s ktorými sme pracovali už v predchádzajúcom, štvrtom zadaní.

V ďalšej časti sme sa presunuli k odvodzovaniu fyzikálnych parametrov. Spomedzi nich bolo pre nás kľúčové zistiť hodnotu normálneho tiažového zrýchlenia priamo na povrchu elipsoidu GRS-80, ktorú označujeme  $\gamma_0$ , a taktiež sme museli určiť, ako sa táto hodnota mení so stúpajúcou výškou.

Normálny tiažový potenciál  $U(r, \bar{\varphi})$  sme vypočítali podľa vzorcu:

$$U(r, \bar{\varphi}) = \frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n,0} \left( \frac{a}{r} \right)^{2n} P_{2n,0}(\sin \bar{\varphi}) \right] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \bar{\varphi} \quad (8)$$

kde  $J_{2n,0}$  je sférický koeficient, ktorý má tvar:

$$J_{2n,0} = (-1)^{n+1} \frac{3e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \left( 1 - n + 2n \frac{J_{2,0}}{e^2} \right) \quad (9)$$

Normálne tiažové zrýchlenie  $\gamma(\varphi)$  [ $m s^{-2}$ ] vypočítame ako:

$$\gamma(\varphi) = \gamma_0 + \delta_{\gamma_h} \quad (10)$$

kde:

$\gamma_0$  je Somiglianov vzťah (výsledné hodnoty - tab.4):

$$\gamma_0(\varphi, h) = \frac{a \gamma_e \cos^2 \varphi + b \gamma_p \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (11)$$

$\delta_{\gamma_H}$  - Zmena normálneho tiažového zrýchlenia s rastúcou výškou určenou pomocou nivelácie (výsledné hodnoty - tab.4):

$$\delta_{\gamma_H} = \frac{-2\gamma_0}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) h + \frac{3\gamma_0}{a} H^2 \quad (12)$$

kde  $k$  vypočítame ako :

$$k = \frac{b\gamma_q}{a\gamma_e} - 1 \quad (13)$$

Normálne tiažového zrýchlenia na rovníku  $\gamma_e$  sme vypočítali podľa vzorca:

$$\gamma_e = \frac{GM}{ab} \left( 1 - m - \frac{m e' q'}{q} \right) \quad (14)$$

Normálne tiažové zrýchlenie na póle  $\gamma_q$  vypočítame:

$$\gamma_q = \frac{GM}{a^2} \left( 1 + \frac{m e' q'}{q} \right) \quad (15)$$

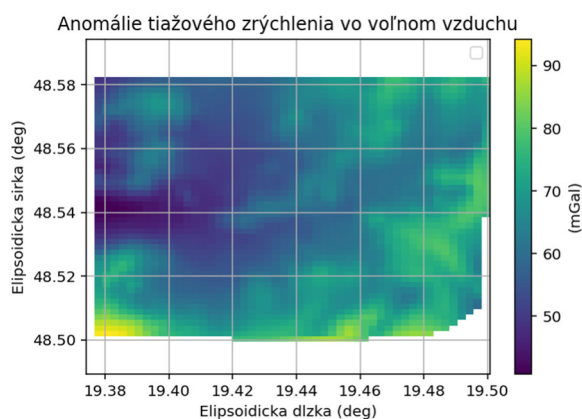
kde  $m$  parameter vypočítame:

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \quad (16)$$

$\frac{e'q'}{q}$  vypočítame :

$$\frac{e'q'}{q} = \frac{21 - 9(e')^2 + 5(e')^4}{7 - 6(e')^2 + 5(e')^4} \quad (17)$$

Na obrázku 5 sme graficky znázornili výsledky výpočtu anomálií tiažového poľa Zeme. Aby sme rozumeli tomu, čo tieto hodnoty predstavujú, treba si uvedomiť, že takzvané poruchové (anomálne) pole vzniká porovnaním dvoch veličín – je to vlastne rozdiel medzi tým, aké je tiažové pole v skutočnosti, a tým, aké by bolo podľa teoretického normálneho modelu.



Obrázok 5 - grafické znázornenie Anomálii tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu

Veličiny poruchového poľa:

- a) Poruchový potenciál  $T(P)$  [ $\text{m}^2\text{s}^{-2}$ ]
- b) Porucha tiažového zrýchlenia  $\delta g(P)$  [mGal]
- c) Anomália tiažového zrýchlenia  $\Delta g$  [mGal]
- d) Poruchový tenzor  $\mathbf{T}(\mathbf{P})$  [E]

a) Poruchový potenciál  $T(P)$  [ $\text{m}^2\text{s}^{-2}$ ] sme počítali:

$$T(P) = W(P) - U(P) = V_g(P) + V_c(P) - U_g(P) + U_c(P) \quad (18)$$

kde

$W(P)$  je skutočný tiažový potenciál,

$U(P)$  je normálny tiažový potenciál,



$V_g(P)$  je skutočný gravitačný potenciál,  
 $V_c(P)$  je skutočný odstredivý potenciál,  
 $\square_c(P)$  je normálny odstredivý potenciál,  
 $\square_g(P)$  je normálny gravitačný potenciál.

Na určenie veľkosti poruchy tiažového zrýchlenia  $\delta g(P)$  v konkrétnom bode P sme aplikovali príslušný matematický vzťah. Výslednú hodnotu uvádzame v jednotkách mGal, pričom samotný výpočet sme realizovali podľa nasledujúceho vzorca:

$$\delta_g(P) = g(P) - \gamma(P) \quad (19)$$

kde:

$g(P)$  - je tiažové zrýchlenie,

$\gamma(P)$  - je normálne tiažové zrýchlenie vyjadrené :  $\gamma(P) = \gamma_0(Q_0) + \delta_{\gamma h}$ ,

$\gamma_0(Q_0)$  -je normálne tiažové zrýchlenie v bode  $Q_0$  na povrchu elipsoidu,

$\delta_{\gamma h}$  - je redukcia normálneho tiažového zrýchlenia z výšky nad elipsoidom.

Ak chceme túto závislosť zapísať pomocou konkrétnej rovnice, bude vyzerat' takto:

$$\delta_g(P) = g(P) - (\gamma_0(Q_0) + \delta_{\gamma h}) \quad (20)$$

Pre výpočet anomálie tiažového zrýchlenia  $\Delta g$  [mGal] sme vychádzali z definície, ktorá porovnáva reálne a modelové pole. Konkrétne sme ju určili ako rozdiel medzi skutočným tiažovým zrýchlením v bode P  $g(P)$  a normálnym tiažovým zrýchlením v bode Q  $\gamma(Q)$  na povrchu teluroidu. Kompletný prehľad vypočítaných hodnôt nájdete spracovaný v tabuľke č. 4

$$\Delta g = g(P) - \gamma(Q) \quad (21)$$

Taktiež vzťah môžeme napísať ako :

$$\Delta g = g(P) - (\gamma_0(Q_0) + \delta_{\gamma h}) \quad (22)$$

Poruchový tenzor **T(P)** [E] :

$$\mathbf{T(P)} = \mathbf{W(P)} - \mathbf{U(P)} \quad (23)$$

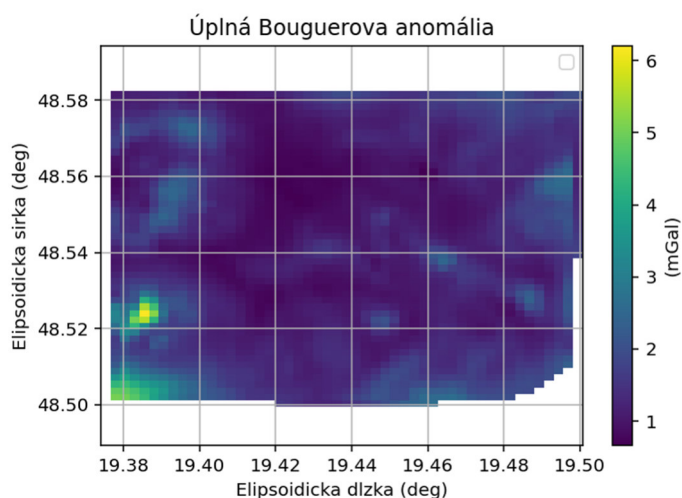
V rámci ďalšieho spracovania údajov sme pristúpili k výpočtu úplnej Bouguerovej anomálie tiažového zrýchlenia. Výsledné hodnoty tejto veličiny uvádzame v miligaloch [mGal] a ich grafickú interpretáciu ponúka obrázok 6. Samotný výpočet sme realizovali podľa vzťahu:

$$\Delta g_{\dot{U}B} = \Delta g_{vv} + \delta_{gT}, \quad (24)$$

kde:

$\Delta g_{vv}$  je anomália tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu,

$\delta_{gT}$  je topografická redukcia.



Obrázok 6 - grafické znázornenie Úplnej Bouguerovej anomálie

Aby sme získali korektné hodnoty tiažového poľa, bolo potrebné vykonať topografickú redukciu. Týmto krokom odstraňujeme gravitačné pôsobenie hmoty, ktorá sa rozprestiera medzi geoidom a členitým zemským povrchom. Celý proces výpočtu je založený na predpoklade, že hustota týchto povrchových hmôt sa nemení, a preto ju v celom profile považujeme za konštantnú.

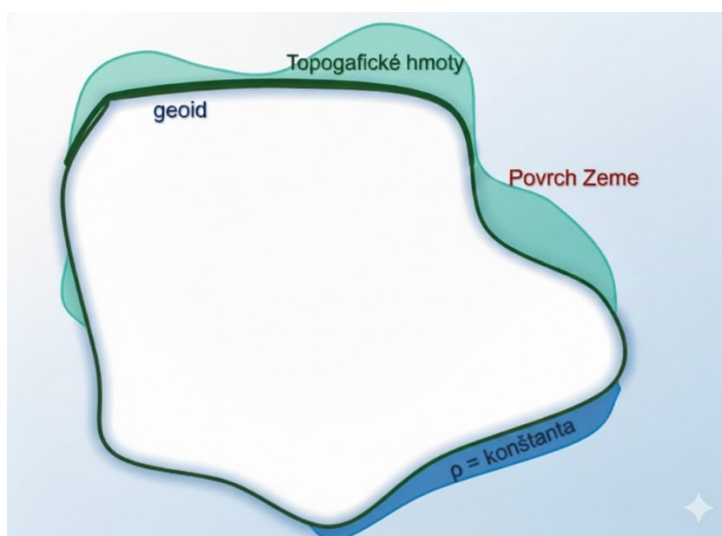
Základný vzťah úplnej Bouguerovej redukcie je:

$$\Delta g_{UB} = \Delta g_{vv} + \delta g_{SBV} + \delta g_{TOP} \quad (25)$$

kde

$\delta g_{SBV}$  - je účinok sférickej Bouguerovej vrstvy,

$\delta g_{TOP}$  - je topografická korekcia



Obrázok 7 – Grafické znázornenie topografických hmôt

Sférickú redukciu Bouguerovej vrstvy sme počítali ako:

$$\Delta g_{UB} = \Delta g_{vv} + \delta g_{BD} + \delta g_{TOP}^{0-166.7km} + Bu \quad (26)$$

kde:

$\delta g_{BD}$  je redukcia z Bouguerovej dosky,

Bu je Bullardov člen

$$\delta g_{BD} = -2\pi G\rho H \doteq -0.1119 \times H \quad (27)$$

Bullardov člen vyjadruje vplyv zakrivenia Bouguerovej dosky na tiažové zrýchlenie v okolí výpočtového bodu.

Tabuľka 4 - Ukážka výstupných hodnôt (prvé 3 hodnoty)

Č.b.	$\gamma_0[mGal]$	$\delta\gamma_H[mGal]$	$\Delta g[mGal]$	$\delta g_{BD}[mGal]$	$\Delta g_{\dot{U}B}[mGal]$
10	980943,4728	-148,0737	33,2213944	-48,79372	-15,22368
20	980943,1727	-155,6291	36,6058827	-51,53489	-14,42847
30	980942,9238	-161,9598	38,2830864	-53,83170	-14,95131
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

kde:

$\gamma_0$  je Normálne tiažové zrýchlenie na povrchu elipsoidu,

$\delta\gamma_H$  je zmena normálneho tiažového zrýchlenia s nadmorskou výškou H,

$\Delta g$  je anomália tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu,

$\delta g_{BD}$  je redukcia z Bouguerovej dosky,

$\Delta g_{\dot{U}B}$  je úplná Bouguerova anomália tiažového zrýchlenia.

Úloha č.2:

Pri stanovovaní hodnôt pre anomáliu tiažového zrýchlenia  $\Delta g$  a poruchu tiažového zrýchlenia  $\delta g$  sme postupovali analogicky ako v predchádzajúcej časti. Aplikovali sme identické matematické vzťahy, ktoré boli definované už v rámci úlohy č. 1, konkrétne ide o rovnice označené číslami 19 a 21.

Druhá radiálna derivácia poruchového potenciálu  $T_\pi$  [E] :

$$T_{rr} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \quad (28)$$

kde:

T - je poruchový potenciál.

Výška kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom  $\zeta$ [m]:

$$\zeta = \frac{T(P)}{\gamma(P)} \quad (29)$$

Laplaceova diferenciálna rovnica:

$$\nabla^2 T = \nabla^2 (V_g - U_g) = \nabla^2 V_g - \nabla^2 U_g = 0 \quad (30)$$

$$\nabla^2 T = 0 \quad (31)$$

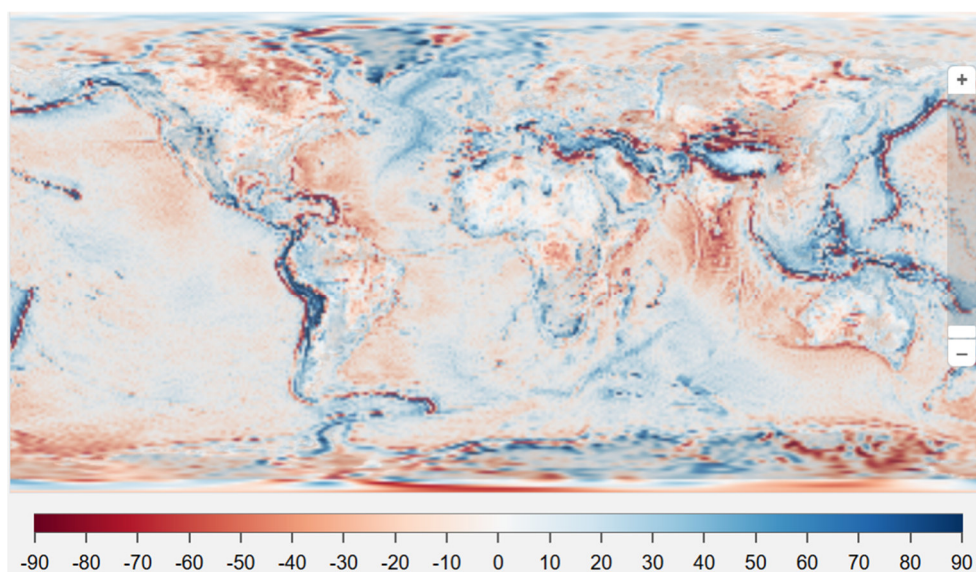
Ďalej sme pokračovali druhou časťou zadania, kde sme naplno využili globálny geopotenciálny model. Tento nástroj nám umožnil určiť hodnoty rôznych geofyzikálnych parametrov a následne ich prehľadne vykresliť na celosvetovej mriežke, čím sme získali komplexný obraz o ich rozložení na Zemi.

Prostredníctvom portálu ICGEM sme pristúpili k výpočtom s využitím modelu GO\_CONS\_GCF\_2\_DIR\_R6. Dôležitým krokom bol výber referenčného elipsoidu GRS-80, vďaka čomu systém automaticky priradil správne parametre elipsoidu. Parametre mriežky sme nastavili globálne: pre zemepisné šírky sme zadali interval od  $-90^\circ$  do  $90^\circ$  a pre dĺžky od  $-180^\circ$  do  $180^\circ$ , pričom sme pre oba smery zachovali rovnaký krok  $1,0^\circ$ . Keďže cieľom bolo získať údaje priamo na povrchu tohto telesa, výšku nad elipsoidom sme v zadani zdefinovali ako nulovú (0,0 m).

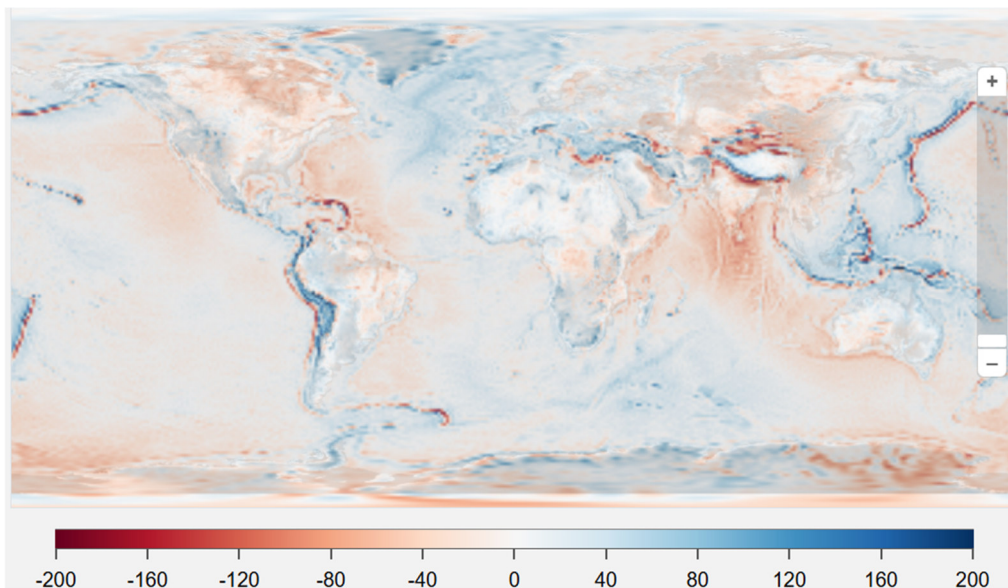
Aplikovaním tohto jednotného postupu sme úspešne vygenerovali všetky štyri požadované mapové výstupy. Následne sme pre každú z týchto máp stiahli vypočítané dáta a z celej mriežky sme náhodným výberom zvolili tri konkrétne body. Ich presné hodnoty a súradnice sme pre prehľadnosť spracovali a uvádzame ich v tabuľke č. 5.

Tabuľka 5 – Výsledné hodnoty v 3 ľubovoľných bodoch gridu

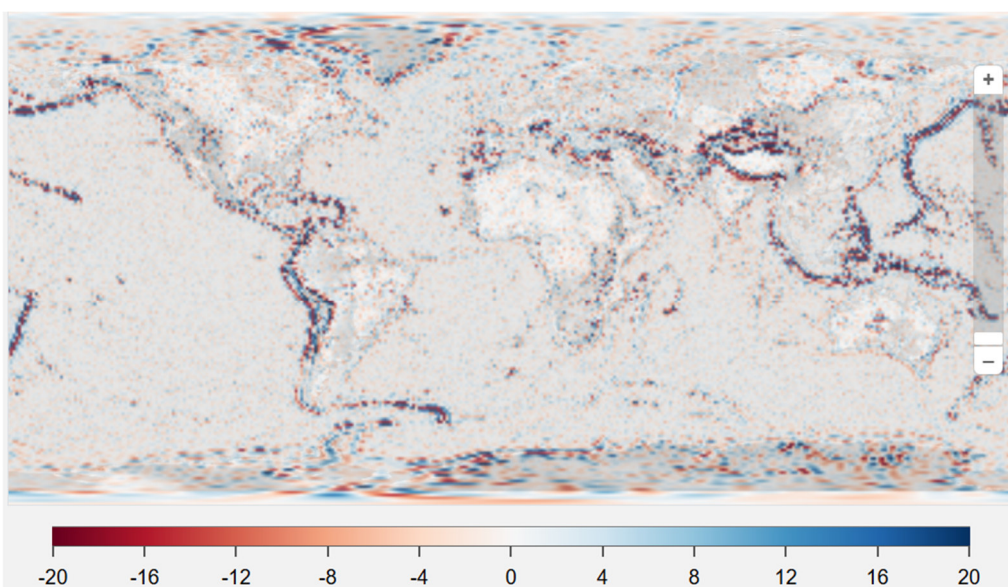
Dĺžka [°]	Šírka [°]	$\Delta g$ [mGal]	$\delta g$ [mGal]	$T_{rr}$ [E]	$\zeta$ [m]
-179	90	1,0323776	5,4004801	-0,9357506	14,120
4	60	-7.8073294	5.7673456	-3.0168643	43.977
92	30	33.9416045	24.0421034	4.69623350	-32.310



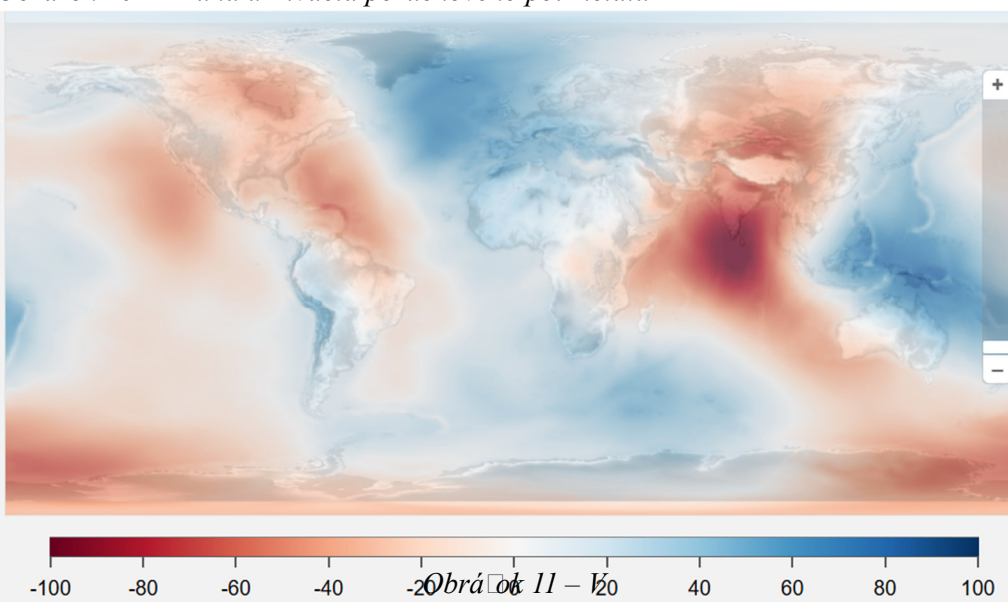
Obrázok 8 – Anomália tiažového rýchľenia  $\Delta g$  [mGal]



Obrázok 9 – Porucha tiažového zrýchlenia  $\delta g$  [mGal]



Obrázok 10 – Druhá derivácia poruchového potenciálu



Obrázok 11 –  $\nabla^2 \delta g$

*Obrátok 11 - Výška kvádroidu nad refrakčným lipoidom*

V Pezinku dňa 14.12.2025

Alexandra Verešová